

高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

PAILIE ZUHE YU GAILÜ

排列组合与概率

本书主编 王俊明



浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 排列组合与概率 / 陶平生等主编. 一杭州：浙江大学出版社，2007.4
ISBN 978-7-308-05240-5

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.数学课—高中—数学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039716 号

排列组合与概率

本书主编　王俊明

责任编辑　沈国明
出版发行　浙江大学出版社
　　　　　(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
　　　　　(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
　　　　　(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　6
印　　数　00001－10000
字　　数　125 千
版 印 次　2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05240-5
定　　价　9.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称IMO)由来已久，自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来，有近60年的历史，其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下，世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前，我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动，吸引了无数数学爱好者积极参与，也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台，是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到，通过这项活动，发现了一批数学苗子，培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来，我国的数学竞赛体制日趋完善，它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革，各种学科竞赛，尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上，学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望，在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

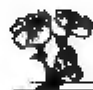
丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张 留、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。



目　录





第1讲 几个基本原理

知识点金

排列与组合问题是一类特殊的计数问题，它的解决需要用到以下几个基本工具：

1. 对应原理：对于两个有限集 A 和 B，若存在一个由 A 到 B 的一一映射，则有 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$ 或 $|A|=|B|$.

2. 分类计数原理：完成一件事，有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么，完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

3. 分步计数原理：完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么，完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

4. 容斥原理：$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$.

例题精析

例1 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

分析 将这 $2n$ 个人列成一排，让最左端的人先选一人，之后让剩余的 $2n-2$ 个人中的最左端的人再选一人，…，依次下去，故分 n 步进行，运用分步计数原理即可.

解 将这 $2n$ 个人列成一排，让最左端的人先选一人，有 $2n-1$ 种选法，之后让剩余的 $2n-2$ 个人中的最左端的人再选一人，有 $2n-3$ 种选法，…，依次下去，由分步计数原理知，共有 $(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1$ 种不同的方法.

评注 合理设计解决问题的模式很重要.本题是在结对方法构成的集合与将 $2n$ 个人列成一排依次结对的方法构成的集合之间建立了一一对应关系.

例 2 在正方体的 8 个顶点、12 条棱的中点、6 个面的中心及正方体的中心共 27 个点中，共线的三点组有多少个?

分析 这些点中取出三点若是共线点，则必含中心，故运用分类计数原理计数即可.

解 两端点均为顶点的共线三点组共有 $\frac{8\times7}{2}=28$ 个；

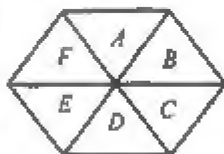
两端点均为面的中心的共线三点组共有 $\frac{6\times1}{2}=3$ 个；

两端点均为各棱中点的共线三点组共有 $\frac{12\times3}{2}=18$ 个，且没有别的类型的共线三点组，故共有 $(28+3+18)=49$ 个共线三点组.

评注 根据题意合理分类很重要.

例 3 如图所示，在一个正六边形的六块区域栽种观赏植物，要求同一块区域中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物.现有 4 种不同的植物可供选择，共有多少种栽种方案?

分析 由于相邻的两块区域种不同的植物，故可按三块区域 A、C、E 种植物的种数分类计数.



解 考虑 A、C、E 种同一种植物，有 $4\times3\times3\times3=108$ 种方法；考虑 A、C、E 种同两种植物，有 $3\times4\times3\times3\times2\times2=432$ 种方法；考虑 A、C、E 种同三种植物，有 $A_4^3\times2\times2\times2=192$ 种方法，故共有 $108+432+192=732$ 种方法.

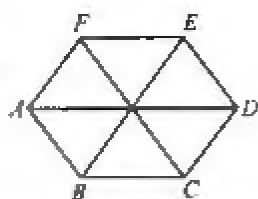
例 4 如图所示，设 $ABCDEF$ 为正六边形.一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一，若在 5 次之内跳到 D 点，则停止跳动，若在 5 次之内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动.那么，这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法有多少种?

分析 考虑青蛙由点 A 到点 D 需要跳动的次数，青蛙不能经过跳 1 次、2 次，或 4 次到达点 D，故青蛙跳 3 次或 5 次能到达点 D，之后分类计算便可求得.

解 如图所示，显然青蛙不能经过跳 1 次、2 次，或 4 次到达 D 点，故青蛙的跳法只有下列两类情形：

(1)青蛙跳 3 次到达 D 点，有 2 种跳法；





(2)青蛙一共跳 5 次后停止，这时，前 3 次的跳法有 2^3-2 种，后两次的跳法有 2^2 种，故青蛙一共跳 5 次的跳法有 $(2^3-2)\times 2^2=24$ 种.

由(1)(2)可知青蛙共有 $24+2=26$ 种不同的跳法.

例 5 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 共有多少组正整数解？

分析 考虑 18 个排成一排的相同小球，在它们之间的 17 个空位插入 4 个隔板，每一种插法对应着方程的一组解，反过来，方程的每一组解也对应着一种插法，故只要求出共有多少种插法即可.

解 将 18 个相同的小球排成一排，在它们之间的 17 个空位插入 4 个隔板，对每一种插法对应着方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 的一组正整数解，反过来，方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 的每一组正整数解也对应着一种插法，故方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 共有 C_{17}^4 组正整数解.

评注 本题又是运用对应原理解决问题.

例 6 整数 $1,2,\cdots,n$ 的排列满足：每个数或者大于它之前的所有数，或者小于它之前的所有数，试问有多少这样的排列？

分析 记所有的排列的个数为 a_n，考虑数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，再由递推公式求出其通项公式，从而使问题得以解决.

解 记所有的排列的个数为 a_n.

显然 $a_1=1$.

对于 $n\geqslant 2$，考虑最大的数 n，如果 n 排在第 i 位，则它之后的 $(n-i)$ 个数排序完全确定，即只能是 $n-i,n-i-1,\cdots,1$；而它之前的 $(i-1)$ 个数有 a_{i-1} 种排法. 考虑到的所有不同的位置，由分类计数原理知：$a_n=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，于是 $a_{n-1}=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}$，有 $a_n=2a_{n-1}$，所以，$a_n=2^{n-1}$.

评注 以上方法是研究排列组合问题的一种重要方法——递推方法. 在此过程中，我们考虑了最大数 n. 这里又渗透着数学中的一种重要方法——极端性原理.

例 7 有集合 A,B,C(不必两两相异)的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$，求满足条件的三元有序集合组 (A,B,C) 的个数.

分析 利用文氏图，考虑如下 7 个区域，运用分步计数原理即可.

解 任取一数 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

则对集合 A 而言，$i\in A$ 或 $i\notin A$ 有 2 种可能；

对集合 B 而言，$i\in B$ 或 $i\notin B$ 有 2 种可能；

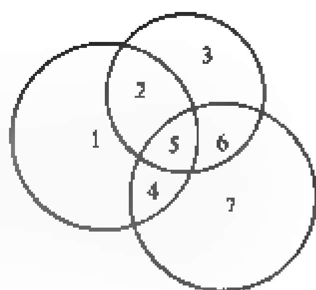
对集合 C 而言，$i\in C$ 或 $i\notin C$ 有 2 种可能.

但 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$，故排除 $i\notin A$，$i\notin B$，$i\notin C$ 的可能，



所以有 2^3-1 种可能.

由分步计数原理知(A,B,C)的数组共有$(2^3-1)^n=7^n$



评析 确定集合有序组可分为 n 个步骤,第一步确定数字1有多少种可能,第二步确定数字2有多少种可能,…,第 n 步确定数字 n 有多少种可能,这种解决问题的途径设计很关键

例8 p 为集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列,一个元素 $j\in S_n$,如果满足 $p(j)=j$,则称之为 p 的一个不动点.令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列的个数,g_n 为恰好有一个不动点的排列的个数,求证:$f_n-g_n=1$.

分析 考虑容斥原理

解 利用容斥原理,可以得到 n 元的错排公式

$$F(n)=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right],$$

易知 $f_n=F(n)$,$g_n=C_n^1F(n-1)$,

故 $f_n-g_n=F(n)-C_n^1F(n-1)$

$$=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]-n\cdot(n-1)!\cdot\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

$=(-1)^n$,

即 $f_n-g_n=1$.

例9 设 $D=\{1,2,\cdots,10\}$,$f(x)$是D到D的一一映射,令 $f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$,$n\in\mathbf{N}^*$;$f_1(x)=f(x)$.试求D的某一个排列 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$,使下列等式成立:$\sum\limits_{i=1}^{10}x_if_{2520}(i)=220$.

分析 因为$f(x)$是D到D的一一映射,因此先求出使 $f_{r_i}(i)=i$ 成立的 r_i,再用排序不等式即可.

解 因$f(x)$是D到D的一一映射,所以,对 $i=1,2,\cdots,10$,有$\{i,f_1(i),f_2(i),\cdots,f_{10}(i)\}\subseteq D$,据抽屉原理知,存在 $r_i(1\leqslant r_i\leqslant10)$,使 $f_{r_i}(i)=i$.

易得 $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的最小公倍数,故上述 $r_i\mid2520$,于是 $f_{2520}(i)=i$ 对一切 $i\in D$ 成立.故原式为$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i\cdot i=220$.由排序不等式知$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i\cdot i\geqslant1\times10+2\times9+\cdots+10\times1=220$.

当且仅当为 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的反序排列时,上式取等号.故所求排列为$10,9,8,\cdots,2,1$.

例10 设一个圆分成 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 共 n 个扇形.用 m 种不同的颜色对这 n 个扇形着色$(m\geqslant3,n\geqslant3)$,每一个扇形着一种颜色,相邻的扇形着不同的颜色.那么,共有多少种不同的着色方法?



分析 考虑用递推方法解决问题.

解 设 a_n 为满足要求的对 n 个扇形的着色方法数,对扇形 S_1 有 m 种不同的着色方法,S_2 有 $m-1$ 种不同的着色方法,S_3 有 $m-1$ 种不同的着色方法,…,S_n 也有 $m-1$ 种不同的着色方法. 于是,共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种不同的着色方法. 但这些方法中可能出现 S_1 与 S_n 着色相同的情形. 此时,把 S_1 与 S_n 看作一个扇形着色,其着色方法相当于用 m 种颜色对 $n-1$ 个扇形着色,不同的着色方法有 a_{n-1} 种,故 $a_n=m(m-1)^{n-1}-a_{n-1}(n\geqslant3)$.

即 $a_n-(m-1)^n=-[a_{n-1}-(m-1)^{n-1}]$, $a_3=m(m-1)(m-2)$.

$\therefore a_n-(m-1)^n=[m(m-1)(m-2)-(m-1)^3](-1)^{n-3}=(m-1)(-1)^n$.

$\therefore a_n=(m-1)^n+(m-1)(-1)^n(n\geqslant3)$ 即为所求.



思考交流

1. 从 1 到 100 的正整数中每次取出不同的 2 个数,使它们的和大于 100,则不同的取法有多少种?

解 此题数字较多,情况也不一样,需要分析摸索其规律. $1+100=101>100$,1 为被加数有 1 种. 同理,2 为被加数有 2 种,3 为被加数有 3 种,…,49 为被加数有 49 种,50 为被加数有 50 种,但 51 为被加数只有 49 种. 同理,52 为被加数有 48 种,…,99 为被加数只有 1 种. 故,不同的取法共有:$1+2+3+\cdots+50+(49+48+\cdots+1)=2500$(种).

2. 圆排列

定义 从集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序(如逆时针)排成一个圆圈,称这样的排列为圆排列(或称循环排列).

需要注意的是:若一个圆排列经旋转后可得另一个圆排列,则这两个圆排列是相同的.

定理 集合 A 中的 n 个元素的 r 圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!).$$

证明 由于把一个圆排列旋转所得到的另一个圆排列视为相同的圆排列,因此排列 $a_1a_2\cdots a_r$, $a_2a_3\cdots a_ra_1$, $a_3a_4\cdots a_ra_1a_2$, …, $a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$ 在圆排列中是同一个,即一个圆排列可以产生 r 个线排列,而总共有 $P(n,r)$ 个线排列. 故圆排列的个数为

$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!)$.

(1)有 8 人围圆桌就餐,问有多少种就座方式? 如果有两人不愿坐在一起,又有多少种就座方式?

解 由定理知,8 人围圆桌就座,共有 $8!/8=7!$ 种就座方式.

又由于两人不愿坐在一起,设这两个人为甲和乙,当甲和乙坐在一起时,相当于 7 个



人围圆桌而坐，其就座方式为 $7!/7=6!$，而甲和乙坐在一起时，又有两种情况，或者甲坐在乙的右面，或者甲坐在乙的左面. 这样一来，甲和乙坐在一起时共有 $2\times 6!$ 种就座方式. 因此，甲和乙不坐在一起时的就座方式的总数为

$$7!-2\times 6!=5\times 6!=3600$$

(2)4 男 4 女围圆桌交替就座有多少种方式?

解 显然，这是一个圆排列问题. 先让 4 个男的围圆桌而坐，由定理知共有 $4!/4$ 种就座方式. 然后加入一个女的进去就座就有 4 种方式，加入第二个女的又有 3 种方式，加入第三个女的又有 2 种方式，加入第四个女的只有 1 种方式. 由乘法规则知，4 男 4 女围圆桌交替就座的方式数为

$$(4!/4)\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=144.$$

同步检测

一、选择题

1. 数 1447，1005，1231，有某些共同点，即每个都是首位为 1 的四位数，且每个四位数中恰有两个数字相同，这样的四位数共有(　　)

A. 455 个　　B. 432 个　　C. 421 个　　D. 423 个

2. 电话号码有 10 个数码可供选择，从理论上讲，采用 7 位号码比采用 6 位号码可多装的电话门数为(　　)

A. $P_{10}^7 P_{10}^6$　　B. $C_{10}^7-C_{10}^6$　　C. $7^{10}-6^{10}$　　D. 10^7-10^6

3. 直线上分布着 2007 个点，以这些点为端点的一切的线段的中点，至少可以得出多少个互不重合的中点?(　　)

A. 2005 个　　B. 2007 个　　C. 4009 个　　D. 4011 个

二、填空题

4. 把 $\triangle ABC$ 内任意不共线的 2004 个点加上 $\triangle ABC$ 的 3 个顶点共 2007 个点为顶点，连线组成互不相叠的小三角形，则一共可以组成小三角形的个数为______.

5. (1999 年全国高中数学联合竞赛试题)已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾角为锐角，那么这样的直线共有______条.

三、解答题

6. (1993 年美国数学邀请赛试题)在 4000 至 7000 之间有多少个四个数字均不相同的偶数?

7.（1996 年美国数学邀请赛试题）一个 $150\times324\times375$ 的长方体由 $1\times1\times1$ 的单位立方体胶合在一起而成. 这个长方体的一条内对角线能穿过多少个单位立方体的内部？

8.（第 6 届 IMO 试题）平面上给定 5 个点. 这些点两两之间的连线互不平行，又不垂直，也不重合，从任何一点开始，向其余四点两两之间的连线作垂线，如果不计已知的 5 个点，所有这些垂线间的交点数最多是多少个？

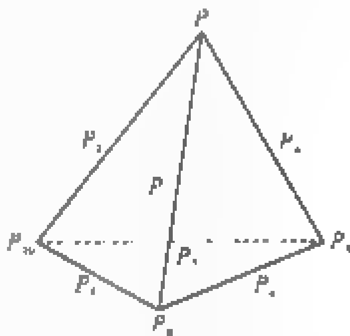
9. 把 1，2，3，…，2007 这 2007 个正整数随意放置在一个圆周上，统计所有相邻 3 个数的奇偶性得知，3 个数全是奇数的有 600 组，恰好有 2 个奇数的有 500 组. 问：恰好有 1 个奇数的有几组？全部不是奇数的有几组？

10. “渐升数”是指每个数字比其左边的数字大的正整数，如 34689. 已知有 $C_9^5=126$ 个五位“渐升数”，若把这些数按从小到大的顺序排列，则第 100 个数是多少？

11. 把一个给定的有理数写成既约分数，并计算所得分子与分母的乘积. 在 0 与 1 之间有多少个有理数，按此法所得乘积是 20!？

12. 若(1) a,b,c,d 都属于 $\{1,2,3,4\}$；(2) $a\neq b, b\neq c, c\neq d, d\neq a$；(3) a 是 a,b,c,d 中的最小值. 那么，可以组成不同的四位数 $\overline{abcd}$ 的个数是多少？

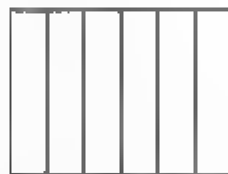
13. 如图，点 $P_1,P_2,\cdots,P_{10}$ 分别是四面体的顶点或棱的中点，那么，在同一平面上的四点组有多少个？


第 13 题图

14. 在如图所示的六块土地上种上甲或乙两种蔬菜（只种其中一种，也可两种都种，但每一块土地只种一种蔬菜），要求相邻两块土地不都种甲种蔬菜，问有多少种种蔬菜的方法？

15. 已知两个由实数构成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射使得 B 中每个元素都有原象，且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射有多少个？

16. 将 $(a+b+c+d)^n$ 展开合并同类项后，共有多少项？


第 14 题图

17. 从 1，2，3，…，14 中取出 3 个数 a_1,a_2,a_3，满足 $a_1\leqslant a_2-3$，$a_2\leqslant a_3-3$，问有多少种不同的选法？

18. 一段楼梯共有 12 级台阶. 某人上楼时，有时一步迈一级台阶，有时一步迈两级台阶. 问此人共有多少种上楼的方法？

19. 方程 $2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$ 的非负整数解共有多少个？

20. 设 n 是正整数. 我们说集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 具有性质 P 是指在 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 当中至少有一个 i 使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$. 求证：对于任何 n，具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列多.



第2讲　排列与组合

知识点金

1. 排列数公式：$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

证明：设从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列构成的集合为 A，从 n 个不同元素中取出 m 个元素填入事先排好顺序的 m 个空位的方法构成的集合为 B，显然存在一个由 A 到 B 的一一映射。现在我们来计算有多少种不同的填法，填空可分为 m 个步骤：第1步，填第1位可以从 n 个元素中任选一个填上，共有 n 种填法；第2步，填第2位可以从余下的 $n-1$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-1$ 种填法；第3步，填第3位可以从余下的 $n-2$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-2$ 种填法；…；第 m 步，当前面的 $m-1$ 个空位都填上后，第 m 位只能从余下的 $n-m+1$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-m+1$ 种填法。由分步计数原理，得到公式：$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

2. 组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$

证明：考虑从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列数，求它的值可以分为以下两个步骤：第1步，先求出从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合数；第2步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数。根据分步计数原理，得 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$，所以 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$。

注：此法是运用方程的思想间接求解。其基本要领是：先把待研究的问题置于另一个已研究过的问题之中，建立待求未知量的方程，再解方程即可。

3. 重要等式

①$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$；



②$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$，$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$，

$C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$；

③$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$；

④$A_1^1+2A_2^2+3A_3^3+\cdots+nA_n^n=(n+1)!-1$.

证明：左$=1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!$

$=(2-1)1!+(3-1)2!+(4-1)3!+\cdots+[(n+1)-1]n!$

$=2!+3!+4!+\cdots+(n+1)!-1!-2!-3!-\cdots-n!$

$=(n+1)!-1$

4．折线法：

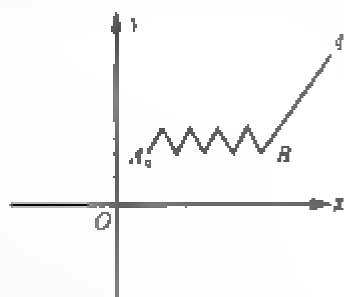
定义：在直角坐标系中，设$A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)(a_n>a_0)$为两个格点，从$A_0(a_0,b_0)$到$A_n(a_n,b_n)$的连线由最小格点正方形的对角线首尾相连接而成，且任何平行于y轴的直线与这条连线只有一个交点，我们把这条连线叫做连接$A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$的折线，点$A_0(a_0,b_0)$称为这条折线的起点，点$A_n(a_n,b_n)$称为终点．点$A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$之间能用折线连接的充要条件是：$|b_n-b_0|\leqslant a_n-a_0=n$，$|b_n-b_0|+a_n-a_0\equiv0\pmod{2}$．

证明：设这些最小格点正方形对角线的端点依次为$A_i(a_i,b_i)(i=0,1,\cdots,n)$，其中，$a_i-a_{i-1}=1$，$|b_i-b_{i-1}|=1$，$1\leqslant i\leqslant n$．

1)必要性：

$|b_n-b_0|=|(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_1-b_0)|\leqslant|b_n-b_{n-1}|+|b_{n-1}-b_{n-2}|+\cdots+|b_1-b_0|=n=a_n-a_0$，设(/)型的对角线有$x$个，(\)型的对角线有$y$个，则$x+y=a_n-a_0$，$x-y=b_n-b_0$，$|b_n-b_0|+a_n-a_0=2x$或$2y\equiv0\pmod{2}$．

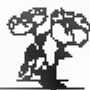
2)充分性：不妨设$b_n\geqslant b_0$，如图所示：



考虑格点B，其坐标为$(a_n-b_n+b_0,b_0)$，因为$|b_n-b_0|\equiv(b_n-b_0)\pmod{2}$，故$a_n-b_n+b_0-a_0\equiv0\pmod{2}$，所以由$A_0(a_0,b_0)$到$B$可用$\frac{1}{2}(a_n-b_n+b_0-a_0)$个(/)和$\frac{1}{2}(a_n-b_n+b_0-a_0)$个(\)连成折线，而由$B$到$A_n(a_n,b_n)$可用一条边长为$b_n-b_0$的正方形的对角线连接．证毕．

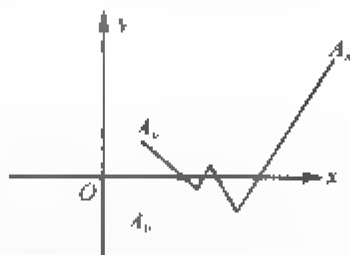
定理1：连接格点$A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$的折线数目是$C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}$．

证明：设由$A_0(a_0,b_0)$到$A_n(a_n,b_n)$的n条线段中，有x个(/)，有y个(\)，则$x+y=a_n-a_0$，$x-y=b_n-b_0$，$x=\frac{1}{2}(a_n+b_n-b_0-a_0)=\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)$，而每一条由$A_0(a_0,b_0)$到$A_n(a_n,b_n)$的折线都对应着一个$x$个(/)和$y$个(\)的一个排列；反之，一个$x$个(/)和$y$个(\)的一个排列，都对应着一个由$A_0(a_0,b_0)$到$A_n(a_n,b_n)$的折线，故共有折线$C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}$条．



定理 2：设 $b_0>0$，$b_n>0$，从点 $A_0(a_0,b_0)$出发，并与 x 轴相交，最后到达 $A_n(a_n,b_n)$的所有折线的条数等于从点 $A'_0(a_0,-b_0)$出发到达点 $A_n(a_n,b_n)$的所有折线的条数（反射原理）。

证明：如图，从点 $A_0(a_0,b_0)$出发，并与 x 轴相交，最后到达点 $A_n(a_n,b_n)$的所有折线条数，等于从点 $A'_0(a_0,-b_0)$出发，最后到达点 $A_n(a_n,b_n)$的所有折线的条数.



定理 3：设 $b_0>0$，$b_n>0$，则

(1)连接 $A_0(a_0,b_0)$与点 $A_n(a_n,b_n)$且与 x 轴相交的折线条数为 $C_n^{\frac{n+b_n+b_0}{2}}$.

(2)连接 $A_0(a_0,b_0)$与点 $A_n(a_n,b_n)$且与 x 轴不相交的折线条数为 $C_n^{\frac{n+b_n-b_0}{2}}-C_n^{\frac{n+b_n+b_0}{2}}$.

证明：由定理 1 和定理 2 可知，定理 3 成立

 **例题精析**

例 1 （1999 年全国高中数学联合竞赛试题）在一次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了，这样全部比赛只进行了 50 场，那么，在上述 3 名选手之间的比赛场数是（　　）

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

分析　设 3 名选手之间的比赛场数为 x，建立关于 x 的方程便可求出

解　设 3 名选手之间的比赛场数为 x，共有 n 名选手参赛．由题意，可得 $50=C_{n-3}^2+x+(6-2x)$，即 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}=44+x$，由于 $0\leqslant x\leqslant 3$，经检验，仅当 $x=1$ 时，$n=13$ 是整数. 故选 B.

例 2　从 7 名男乒乓球队员和 5 名女乒乓球队员中选出 4 名进行男女混合双打，不同的分组方法有（　　）种.

A. $2C_7^2C_5^2$　　　B. $4C_7^2C_5^2$　　　C. $P_7^2P_5^2$　　　D. $C_7^2C_5^2$

分析　这是一个典型的排列组合混合问题，用分步计数原理便可求出

解　先从 7 名男乒乓球队员中选出 2 人，有 C_7^2 种选法，再从 5 名女乒乓球队员中选出 2 名，有 C_5^2 种选法，最后将选出的 4 名队员分组有 2 种分法，由分步计数原理得共有 $2C_7^2C_5^2$ 种分组方法. 故选 A.

例 3　（捆绑问题）8 名男生和 5 名女生排成一排，要求女生必须相邻，有多少种排法？



分析 将5名女生看作一个人先与另外8名男生排成一排，之后再将5名女生排成一排，运用分步计数原理即可.

解 要求女生相邻，先将她们"捆"在一起，加上8名男生共计9人排列，共有9! 种排法，再将5名女生排列，有5! 种排法，故共有9!·5! 种排法.

评注 捆绑问题也叫相邻问题，是排列中比较重要的问题，要引起重视.

例4 ("插空"问题)圆桌的9个位置上放着9样不同的点心和饮料，6位先生与3位女士共进早餐，3位女士两两不相邻的坐法有多少种?

分析 由于9个位置上的点心和饮料不同，可先考虑线性排列，再把女士相邻的情况去除即可.

解 从圆桌的某个位置开始，将9个位置依次编为第1号，第2号，…，第9号，之后让6位先生从左到右排成一排，有A_6^6种排法，然后让3位女士分别站在排头或排尾或两位男士之间，有A_7^3种排法，9个人排成一列有$A_6^6A_7^3$种排法；但如果排头排尾都是女士，当9个人围桌进餐时则这两个女士相邻，这类情况有$A_6^6C_5^1A_3^2$种，所以，女士不相邻的坐法有$A_6^6A_7^3-A_6^6C_5^1A_3^2$种.

评注 "插空"问题也叫"间隔"问题，解决这类问题可以从不间隔的元素入手，先将其排好，然后将不相邻的元素一个一个插入已经排好的元素两两之间的空位中便可将全部元素按要求排好.

例5 8个女孩和25个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩，有多少种不同的站法?

分析 先让某女孩A固定不动，再从25个男孩中选16个与8个女孩组成"Abb"和7组"abb"，最后把剩下的9个男孩与除"Abb"外的7组"abb"视为16组作任意排列.

解 经旋转可重合的排法应认为是同一种排法，故可考虑让某女孩A固定不动，将圆圈按顺时针的方向拉成一直排，以a，b分别表示女孩和男孩，先从25个男孩中选16个与8个女孩组成"Abb"和7组"abb"有$C_{25}^{16}\cdot P_{16}^{16}$种方法，再把剩下的9个男孩与除"Abb"外的7组"abb"视为16组作任意排列，有P_9^9种方法. 因此，不同的排法有$C_{25}^{16}\cdot P_{16}^{16}\cdot P_9^9=\frac{25!\cdot 16!}{9!}$种.

例6 (圆排列)从n个人中选出m个人坐在有m个座位的圆桌上，共有多少种坐法?

分析 考虑m个人的一个圆排列，坐在圆桌上的m个人他们之间产生m个空位，在任意一个空位处将其断开，就对应一个线性排列. 设所求排列数为x，则$xm=A_n^m$，故$x=\frac{A_n^m}{m}$.

解 设所求排列数为x，因为任意一个m个元素的圆排列对应着一个m个元素的线



性排列，故 $xm=A_n^m$，所以，$x=\dfrac{A_n^m}{m}$

评注 此法并没有直接解决圆排列问题，而是把圆排列问题置于线性排列问题之中，利用方程的思想加以解决，这与组合数公式的推导极为相近．下面再看一例．

例 7 （项链排列）从 n 个不同的珠子中取出 m 个来串成一串项链，共可得到多少种不同的项链？

分析 利用圆排列与项链排列的关系解决即可．

解 设可得到的项链种数为 x，则 $2x$ 为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的圆排列的个数，所以，$2x=\dfrac{A_n^m}{m}$，即 $x=\dfrac{A_n^m}{2m}$，可得到 $\dfrac{A_n^m}{2m}$ 种不同的项链．

例 8 （不尽相异元素的全排列）如果有 n 个元素，有 n_1 个元素相同又有 n_2 个元素相同，…，又有 n_r 个元素相同（$n_1+n_2+\cdots+n_r\leqslant n$），将这 n 个元素全部取出来排成一排，共有多少种排法？

分析 设所有的排列数为 x，考虑 n 个元素的线性排列，建立关于 x 的方程即可．

解 设所求的排列数为 x，则 $xA_{n_1}^{n_1}A_{n_2}^{n_2}\cdots A_{n_r}^{n_r}=A_n^n$，$x=\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$．

例 9 甲、乙两人参加竞选，甲得 m 张选票，乙得 n 张选票，问：在对 $m+n$ 张选票逐一唱票的过程中，甲得票数始终领先于乙得票数的记录有多少种可能？

分析 构造格点，运用对应原理即可．

解 $m+n$ 张选票的点票记录用数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n}$ 表示，当第 k 次唱票时是甲得到的选票，则取 $a_k=1$，是乙得到的选票，则取 $a_k=-1(k=1,2,\cdots,m+n)$．令 $b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k=1,2,\cdots,m+n)$，得数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{m+n}$．因甲得票数一直领先，故对任一 k，$b_k>0$，特别地 $b_1=1$，$b_{m+n}=m-n$．在直角坐标平面上，自左至右依次连接下列格点，$(1,b_1)$，$(2,b_2)$，…，(k,b_k)，…，$(m+n,b_{m+n})$ 得一条含 $m+n-1$ 个点的折线，这条折线与 x 轴不相交．记具有这种性质的折线全体为 B，符合题设的点票记录全体为 A，则 A 与 B 一一对应．所以 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$．由定理 2 有 $|A|=|B|=C_{m+n-1}^{m-1}-C_{m+n-1}^{m}=\dfrac{m-n}{m+n}C_{m+n}^{m}$．

评注 把实际问题转换成数学问题，建立适当的数学模型成为解决此类问题的关键．

例 10 将 6 个人分成 3 组，每组 2 人，共有多少种分法？

分析 直接研究分组问题较为困难，可把分组问题置于另一个问题之中，之后运用方程的思想解决它．

解 考虑将这 6 个人平均分成 3 组，再让这 3 组分别去完成 3 种不同的任务．设平均分成 3 组的分法数为 x，则选派人去完成 3 种不同的任务的方法数为 xA_3^3．另一方面，可



将派人去完成任务分三步进行：第一步，先从6人中选派2人去完成任务一，有C_6^2种选法；第二步，再从剩余的4人中选派2人去完成任务二，有C_4^2种选法；第三步，最后从剩余的2人中选派2人去完成任务三，有C_2^2种选法. 由分步计数原理，共有$C_6^2C_4^2C_2^2$种选派方法，故有$xA_3^3=C_6^2C_4^2C_2^2$，所以，$x=\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$，共有分组方法15种.

评注 将待研究问题置于一个已解决的问题之中，运用方程的思想解决问题是解决排列组合问题的一种常用手段，望读者注意体会.

思考交流

甲、乙两人参加竞选，甲得m张选票，乙得n张选票($m\geqslant n$). 问，在对$m+n$张选票逐一唱票的过程中，甲得票数始终不少于乙得票数的记录有多少种可能?

解 $m+n$张选票的点票记录用数列$a_1,a_2,\cdots,a_{m+n}$表示. 当第k次唱票时是甲得到的选票，则取$a_k=1$；是乙得到的选票，则取$a_k=-1(k=1,2,\cdots,m+n)$. 令$b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k=1,2,\cdots,m+n)$，得数列$b_1,b_2,\cdots,b_{m+n}$. 因甲得票数一直不少于乙得票数，故对任一$k$，$b_k\geqslant 0$，特别地$b_1=1$，$b_{m+n}=m-n$. 在直角坐标平面上，自左至右依次连接下列格点：$(1,b_1),(2,b_2),\cdots,(k,b_k),\cdots,(m+n,b_{m+n})$得一条含$m+n-1$个点的折线. 这条折线与$y=-1$不相交. 每一个满足题意的得票记录都对应着从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的一条与$y=-1$不相交的折线. 反之，从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的一条与$y=-1$不相交的折线，又对应着一个满足题意的得票记录. 因此，只需求出从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的与$y=-1$不相交的折线的条数. 由定理1知共有C_{m+n-1}^{m-1}条从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的折线，从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的一条与$y=-1$相交的折线，又对应着一条从点$(1,-2-b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的折线. 反之，一条从点$(1,-2-b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的折线都对应着从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的一条与$y=-1$相交的折线. 因此，从点$(1,b_1)$到点$(m+n,b_{m+n})$的与$y=-1$相交的折线条数为C_{m+n-1}^{m+1}，从而所求次序数为

$$C_{m+n-1}^{m-1}-C_{m+n-1}^{m+1}=\frac{m-n+1}{m+1}C_{m+n}^{m}.$$



同步检测

一、选择题

1. 把 10 个人平均分成两组，再从每组中选出正副组长各 1 人，则不同的选法个数为(　　)

A. $C_{10}^{5}P_{5}^{2}$　　B. $\frac{1}{2}C_{10}^{5}P_{5}^{2}$　　C. $C_{10}^{5}(P_{5}^{2})^{2}$　　D. $\frac{1}{2}C_{10}^{5}(P_{5}^{2})^{2}$

2. 把 4 个相同的黑球和 3 个相同的白球摆成一排，其排法总数为(　　)

A. $4!\cdot3!$　　B. $7!$　　C. $\frac{1}{2}\cdot4!\cdot3!$　　D. $\frac{7!}{4!\cdot3!}$

3. 把 10 个儿童平均分成两组，每组都围成一个圈圈，围法总数为(　　)

A. $C_{10}^{5}C_{5}^{5}5!\cdot5!$　　B. $\frac{1}{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}5!\cdot5!$　　C. $C_{10}^{5}C_{5}^{5}4\cdot4!$　　D. $\frac{1}{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}4!\cdot4!$

4. 父母子女一共 6 人，围成一张圆桌，最小的孩子的两边是父母双亲，这种坐法有(　　)种。

A. $2!\cdot4!$　　B. $2!\cdot3!$　　C. $3!\cdot4!$　　D. $3!\cdot3!$

5. 重 1g，2g，4g，8g 和 16g 的 5 个砝码，可组成不同的重量(非零)种数为(　　)

A. 2^5　　B. 2^5-1　　C. 5^2　　D. 5^2-1

6. 有伍分、壹角、伍角的人民币各 2 枚，3 张，9 张，可组成的不同币值(非零)有(　　)种。

A. 79　　B. 80　　C. 88　　D. 89

二、填空题

7. 有黄、红、绿三种颜色的卡片，各色都有 5 张分别书写着 A、B、C、D、E，从这些卡片里选取 5 张，要红、黄、绿三色都具备，且文字互不相同，有______种不同的选取方法。

8. "牛头"牌门锁的锁芯中有 5 个弹子孔，每孔要从 6 种不同的弹子中各选置一颗就可以组成各种不同的锁头，最多能配置______种不同的锁头。

9. 7 个不可分辨的有正反面的圆片任意一扔，可以组成______种不同的结果，如果是可以辨认的，又可以组成______种不同的结果。

10. 从 5 类记号分别为 A、B、C、D、E 的总体中，共抽取 15 个样本，有______种不同的抽取方法；如果抽取的样本中每类记号恰有 3 个，又有______种不同的抽取方法。

11. 10 人围圆桌而坐，如果甲、乙两人中间相隔 4 人，有______种坐法。



三、解答题

12. 桌子上有6个空钱包，将12枚壹元的硬币放到这些钱包里，以使至多剩下一个空钱包，问有多少种方法？

13. $n(n>6)$个人围圆桌而坐，设甲、乙是这n个人中的两个。求

(1) 甲、乙相邻的就坐方法数；

(2) 甲、乙之间恰有一个人的就坐方法数；

(3) 甲、乙之间恰有两个人的就坐方法数.

14. 在一车厢中，任何$m(m\geqslant 3)$个旅客都有惟一的公共朋友(当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友，任何人不作为他自己的朋友). 问在这个车厢中，朋友最多的人有多少个朋友？

15. 设集合$A=\{1,2,3,\cdots,366\}$. 如果A的一个二元子集$B=\{a,b\}$满足$17\mid a+b$，则称B具有性质p.

(1)求A的具有性质p的所有二元子集的个数

(2)求A的两两不相交具有性质p的所有二元子集的个数

16. 设某地的街道把城市分割成矩形方格，每个方格叫做块. 甲从家里出发上班，向东要走m块，向北要走n块. 问甲上班的最短路径有多少种？

17. 已知给定正n边形，顶点分别为$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$，一个质点从A_0开始运动，每一次都走到与所在位置相邻的顶点，并规定：一旦它走到A_m($1\leqslant m\leqslant n-1$为给定正整数)就停下不走了. 求恰在第$k$步时走到$A_m$的不同方法数$b_k$.

18. 已知一个n元集合X，X的某些三元子集组成了集合S，且S中每两个元素(子集)之间至多有一个公共元. 求证：存在集合A，$A\subset X$，$A\not\subset S$，使得$|A|\geqslant[\sqrt{2n}]$.

19. 口袋中有白球5个，红球3个，黑球2个(相同颜色的球不可辨)，每次从中任取5个，问有多少种不同的取法？

20. (1995年日本数学竞赛试题)4对夫妇去看电影，8人坐成一排. 若每位女性的邻座只能是丈夫或另外的女性，共有多少种坐法？



第3讲　重集的排列与组合

知识点金

前面讨论的排列与组合，是指从 n 个互不相同元素的集合里，每次取出 r 个互不相同的元素进行排列与组合．然而现实生活中，并不一定是对不同的元素进行排列与组合，为此，先引入重集的概念．

定义 3.1　元素可以多次重复出现的集合称为**重集**．元素 a 出现的次数叫做该元素的**重数**．

一般地，重集 S 表示为 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 S 中 k 个不同类型的元素，$n_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 a_i 的重数，n_i 是正整数，也可以是 ∞．若 a_i 的重数为∞，表示 S 中有无限多个 a_i．

重集 S 的一个 r 排列仍是 S 中的 r 个元素的一个有序摆放．若 S 的元素总个数是 n（包括计算重复元素），那么 S 的 n 排列也可称为 S 的全排列．

重集 S 的 r 组合是 S 中的 r 个元素的一个无序选择．因此，S 的一个 r 组合本身就是重集 S 的一个子重集．如果 S 有 n 个元素，那么 S 只有一个 n 组合，即 S 本身．如果 S 含有 k 个不同类型的元素，那么就存在 S 的 k 个 1 组合．

定理 3.1　重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$ 的 r 排列的个数为 k^r．

证明　在构造 S 的一个 r 排列时，由于 S 的所有元素的重数都是无穷的，因而第一位有 k 种选择，第二位有 k 种选择，…，第 r 位有 k 种选择．由乘法原则知，S 的 r 排列的个数为 k^r．证毕．

定理 3.2　设重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，且 S 的元素个数为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，则 S 的全排列数为



$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}.$$

证明　因为 S 中有 n_1 个 a_1，在 S 的全排列中要占据 n_1 个位置，这些位置的选法有 $C_n^{n_1}$ 种；再从剩下的 $n-n_1$ 个位置选择 n_2 个位置放置所有的 a_2，有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种选法，类似地，依次选择位置安排 $a_3,a_4,\cdots,a_k$，由乘法原则知，S 的全排列数为

$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)$$
$$=C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)$$
$$=\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\ 0!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}.$$

证毕.

定理 3.3　重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$ 的 r 组合的个数为 C_{k+r-1}^{r}.

证明　设 S 的一个 r 组合为 $M=\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_k\cdot a_k\}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$. 显然，S 的 r 组合与方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解构成一一对应关系. 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的一个非负整数解可表示成长为 $k-1+r$ 的二进制序列

$$\underbrace{11\cdots1}_{x_1个}0\underbrace{11\cdots1}_{x_2个}0\cdots0\underbrace{11\cdots1}_{x_k个}$$

其中，该序列中有 $k-1$ 个 0. 而该序列是重集 $\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$ 的一个全排列，故 S 的 r 组合的个数为 C_{k-1+r}^{r}. 证毕.

定理 3.4　设重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$，要求 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至少出现一次的 r 组合数为 C_{r-1}^{k-1}.

证明　在 S 的 r 组合中，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至少要出现一次，所以 $r\geqslant k$. 设 S 的满足定理条件的任一 r 组合为 $\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_k\cdot a_k\}$，则有

$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，且 $x_i\geqslant 1$，x_i 为整数$(i=1,2,\cdots,k)$

令 $y_i=x_i-1(1\leqslant i\leqslant k)$，则

$y_1+y_2+\cdots+y_k=r-k$，且 y_i 为非负整数.

由定理 3.3 知，S 的满足定理的条件的 r 组合的个数为 $C_{k-1+r-k}^{r-k}=C_{r-1}^{k-1}$. 证毕.



例题精析

例 1　如图所示，从 $(0,0)$ 点水平和垂直道路可以走到 (m,n) 点，求从 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的非降路径的条数，其中 m 与 n 均为正整数.



解 从(0,0)点到(m,n)点的非降路径，沿水平方向从左向右走一个单位距离记作 x，沿垂直方向从下向上走一个单位距离记作 y，那么该路径必含 m 个 x 和 n 个 y. 从而，一条路径对应着重集 $S=\{m\cdot x, n\cdot y\}$的一个全排列，即一共有 $P(m+n;m,n)=\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$条非降路径.

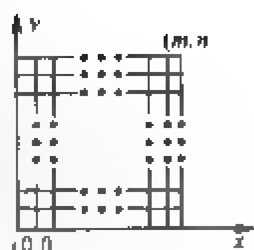


图3.1

例2 设有16个字母，其中 a,b,c,d 各4个，从中任取10个字母，但每种字母至少取2个，能组成多少个不同的10排列？

解 满足题意的10排列可分成如下两类：

(1)一个字母取4次，其余各取2次. 某一字母取4次时，有 $P(10;4,2,2,2)$种，共有 $C_4^1\times P(10;4,2,2,2)$种.

(2)两个字母各取3次，其余各取2次. 某两字母各取3次时，有 $P(10;3,3,2,2)$种，共有 $C_4^2\times P(10;3,3,2,2)$种.

由加法原则知，满足题意的10排列共有：

$C_4^1\times P(10;4,2,2,2)+C_4^2\times P(10;3,3,2,2)=226800$ 个

例3 已知重集 $S=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$，从 S 中取出10个元素(不计次序)，要求元素 a 少于5个，有多少种取法？

解 从重集 S 中任取10个元素组成子重集，共有 $C(3+10-1,10)=C(12,10)$个. 设所取的10个元素的子重集中至少有5个元素为 a，这样的子重集有 $C(3+5-1,5)=C(7,5)$个. 因此，满足题意要求的取法共有 $C_{12}^{10}-C_7^5=45$ 种.

例4 已知重集 $S=\{6\cdot a,5\cdot b,4\cdot c,3\cdot d\}$，做重集 S 的全排列，并要求 d 不挨着. 问有多少个这样的排列？

解 令 $M=\{6\cdot a,5\cdot b,4\cdot c\}$，则 M 的全排列数为 $P(15;6,5,4)=\dfrac{15!}{6!\cdot 5!\cdot 4!}$. 现把3个 d 分别插入 M 的一个全排列的元素之间(包括首尾位置)，便得到 S 的满足题意的一个排列. 因此，由乘法原则，满足题意的 S 的全排列数为 $P(15;6,5,4)\times C_{16}^3$ 个.

例5 由1,2,3,4,5,6这几个数字能组成多少个五位数？又可组成多少个大于34500的五位数？

解 一个五位数，数字可以重复出现，这是一个重排列问题.

由于五位数的每一位在重集 $B=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3,\infty\cdot 4,\infty\cdot 5,\infty\cdot 6\}$中有6种选择，这6个数字可以组成 6^5 个五位数.

又大于34500的五位数可由下面的三种情况组成.

(1)万位上数字是4,5或6，其余四位上的数字中的每个数字都可以从重集 B 中选取6个数字，由乘法规则知，共有 $3\cdot 6^4$ 个这样的数.



(2)万位数是3，千位上是5或6，其余3位上的数字中的每一个都可以从重集B中选取6个数字，共有$2\cdot 6^3$个这样的数。

(3)万位和千位上的数字分别是3和4，百位上的数字是5和6，其余两位上的数字中的每一个都可以从重集B中选取6个数字，故共有$2\cdot 6^2$个这样的数。

由加法原则知，大于34500的五位数的个数为

$3\cdot 6^4+2\cdot 6^3+2\cdot 6^2=4392.$

例6　由4面红旗、3面蓝旗、2面黄旗、5面绿旗可以组成多少种由14面旗子组成的一排彩旗？

解　这是一个重排列问题，它是求重集$\{4\cdot$红旗$,3\cdot$蓝旗$,2\cdot$黄旗$,5\cdot$绿旗$\}$的全排列的个数，由定理3.2知，组成一排彩旗的种类数为

$$\frac{14!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!}.$$

例7　用字母A、B和C组成五个字母的符号，要求在每个符号里，A至多出现2次，B至多出现1次，C至多出现3次，求此类符号的个数。

解　这也是一个重排列问题。根据分析，符合题目要求的符号只有三种情况$\{2\cdot A,0\cdot B,3\cdot C\}$，$\{1\cdot A,1\cdot B,3\cdot C\}$和$\{2\cdot A,1\cdot B,2\cdot C\}$，由定理3.2知，各种情况对应的符号个数分别为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!},\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}和\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}$$

由加法原则知，此类符号的个数为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!}+\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}=60.$$

同步检测

1. 100个人要围坐一圆桌，其中有两人不愿彼此挨着坐，问共有多少种循环座位的排放方法？

2. 平面上有25个点，没有3个点共线，这些点确定多少条直线？确定多少个三角形？

3. 10个男生和5个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻的坐法有多少种？

4. 从1,2,…,100中选出两个不同的数，使其和为偶数，可有多少种取法？

5. 求至少出现一个6且能被3整除的五位数的个数。

6. 某车站有6个入口，每个入口每次只能进一个人，问9人小组共有多少种进站方



案?

7. 将6个蓝球、5个红球、4个白球、3个黄球排成一行，要求黄球不挨着，问有多少种排列方式(同色球不加区别)?

8. 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 的整数解的个数是多少? 其中 $x_1\geq 3$，$x_2\geq 1$，$x_3\geq 0$，$x_4\geq 5$.

9. 设 S 是 n 个元素的集合，求 S 的奇数组合的个数与偶数组合(包含零组合)的个数.

10. 在一次聚会上有 $2n$ 个人，每个人都和另一个人交谈，有多少种成对交谈的方法?

11. 书架上有24卷百科全书，从中选5卷，使得任何2卷都不相继，这样的选法有多少种?

12. 从一个 8×8 的棋盘中选出两个相邻(两个方格在同一行或同一列上)的方格，有多少种选法?

13. 下列各数尾部有多少个零?

(1) 50!;

(2) 1000!.



第4讲 二项式定理

知识点金

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in N^*)$，

其中 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,2,\cdots,n)$ 为展开式中第 $r+1$ 项.

例题精析

例1 求$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^7$的展开式中的常数项.

把$\left(1+\frac{1}{x}\right)$看作一个整体，运用二项式定理即可.

解 由二项式定理得$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^7=\left[1+\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^7=C_7^0+C_7^1\left(x+\frac{1}{x}\right)+\cdots+C_7^r\left(x+\frac{1}{x}\right)^r+\cdots+C_7^7\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$，其中第 $r+1(0\leqslant r\leqslant 7)$ 项为 $T_{r+1}=C_7^r\left(x+\frac{1}{x}\right)^r$.

在$\left(x+\frac{1}{x}\right)^r$的展开式中，设第 $k+1$ 项为常数项，记为 T_{k+1}，则 $T_{k+1}=C_r^kx^{r-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$，这里 $0\leqslant k\leqslant r$.

由 $T_{k+1}=C_r^kx^{r-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$ 得 $r-2k=0$，即 $r=2k$.

这说明 r 为偶数，且 $k=\frac{r}{2}$. 因此所求常数项为 $C_7^0+C_7^2C_2^1+C_7^4C_4^2+C_7^6C_6^3=393$.



例 2 设$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}$ ($n\in N^*$)的整数部分和小数部分分别是a和b，求$b(a+b)$的值.

分析 $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}$是一个二项式，注意到$(5\sqrt{2})^2-7^2=1$，再考虑$(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$即可.

解 因$5\sqrt{2}-7\in(0,1)$，且$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=1$，又$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}=a+b$，∴$(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=\dfrac{1}{a+b}$. 由二项式定理知，$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$是整数，即$a+b-\dfrac{1}{a+b}$是整数，但$a$是整数，故$b-\dfrac{1}{a+b}$是整数. ∵$0<b<1$，∴$b=\dfrac{1}{a+b}$，即$b(a+b)=1$.

例 3 已知a，b为非负实数，$n\in N^*$，求证$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{a^n+b^n}{2}$.

证明 由二项式定理得

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(0\leqslant r\leqslant n)$，

$(b+a)^n=C_n^0b^n+C_n^1b^{n-1}a+\cdots+C_n^rb^{n-r}a^r+\cdots+C_n^na^n$.

所以有

$$\begin{aligned}2(a+b)^n=&C_n^0(a^n+b^n)+C_n^1(a^{n-1}b+b^{n-1}a)+\cdots+C_n^r(a^{n-r}b^r+b^{n-r}a^r)+\\&\cdots+C_n^n(b^n+a^n).\end{aligned}$$

又$(a^n+b^n)-(a^{n-r}b^r+b^{n-r}a^r)=(a^{n-r}-b^{n-r})(a^r-b^r)\geqslant0$.

所以有

$$\begin{aligned}2(a+b)^n=&C_n^0(a^n+b^n)+C_n^1(a^{n-1}b+b^{n-1}a)+\cdots+C_n^r(a^{n-r}b^r+b^{n-r}a^r)+\\&\cdots+C_n^n(b^n+a^n)\\\leqslant&(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)(a^n+b^n)\\=&2^n(a^n+b^n)\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{a^n+b^n}{2}$.

例 4 当$n\in N^*$时，$(3+\sqrt{7})^n$的整数部分是奇数还是偶数？证明你的结论.

分析 考虑$(3+\sqrt{7})^n$和$(3-\sqrt{7})^n$，运用二项式定理即可.

解 $0<(3-\sqrt{7})^n<1$，

$(3+\sqrt{7})^n+(3-\sqrt{7})^n=2(3^nC_n^0+7\cdot3^{n-2}C_n^2+\cdots)$是一个偶数，记为$2k(k\in N^*)$，

则$(3+\sqrt{7})^n=2k-(3-\sqrt{7})^n=(2k-1)+1-(3-\sqrt{7})^n$，

即$[(3+\sqrt{7})^n]=2k-1$. 因此整数部分是奇数.

例 5 设$m=4L+1$，L是非负整数. 求证：

$a=C_n^1+mC_n^3+m^2C_n^5+\cdots+m^{\frac{n-1}{2}}C_n^n$ $(n=2k+1,k\in N)$能被2^{n-1}整除



分析 联想到二项式的结构，构造含有二项式的代数式，$\frac{1}{2\sqrt{m}}[(1+\sqrt{m})^n-(1-\sqrt{m})^n]$，设法分离出整数 2^{n-1}.

证明 由二项式定理得 $a=\frac{1}{2\sqrt{m}}[(1+\sqrt{m})^n-(1-\sqrt{m})^n]$

$$=2^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{m}}{2}\right)^n\right].$$

欲证原题，只须证 $b_n=\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{m}}{2}\right)^n\right]$为整数即可.

易知 $b_{n+1}=b_n+kb_{n-1}$，且 $b_1=1$，$b_2=1$.

由数学归纳法原理知 $b_n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$皆为整数，故

$2^{n-1}\mid C_n^1+mC_n^3+m^2C_n^5+\cdots+m^{\frac{n-1}{2}}C_n^n$.

评注 递归法与归纳法联手是解决此题的关键.

例6 求 $\frac{C_{11}^0}{1}+\frac{C_{11}^1}{2}+\frac{C_{11}^2}{3}+\cdots+\frac{C_{11}^{11}}{12}$的值.

分析 考虑 $\frac{C_{11}^{k-1}}{k}=\frac{11!}{k(k-1)!(12-k)!}=\frac{11!}{k!(12-k)!}=\frac{1}{12}C_{12}^k$.

解 因为 $\frac{C_{11}^{k-1}}{k}=\frac{11!}{k(k-1)!(12-k)!}=\frac{11!}{k!(12-k)!}=\frac{1}{12}C_{12}^k$.

所以原式 $=\frac{1}{12}(C_{12}^1+C_{12}^2+\cdots+C_{12}^{12})=\frac{1}{12}(2^{12}-1)=\frac{1365}{4}$.

例7 求证：任何不大于 $n!$ 的正整数，都能表示成不多于 n 个数的和．在这些加数中，没有两个数是相同的，并且任何一个都是 $n!$ 的因数.

分析 运用数学归纳法.

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，结论显然正确.

假设当 $n=k$ 时，结论正确.

则对于整数 $a<(k+1)!$，将 a 除以 $(k+1)$，得 $a=d(k+1)+r$，这里 $d\leqslant k!$，$0\leqslant r<k+1$. 由归纳假设，d 可表示为 $d=d_1+d_2+\cdots+d_l$，其中 $l\leqslant k$，且所有的 $d_i(i=1,2,\cdots,l)$ 都是 $k!$ 的因数.

于是，$a=d_1(k+1)+d_2(k+1)+\cdots+d_l(k+1)+r$.

这个和式的加数不多于 $(k+1)$ 个，它们互不相同，并且每个加数都是 $(k+1)!$ 的因数，所以，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 结论正确.

例8 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. 求证：对于每个 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}$



2^{n+1}

分析 本题一般采用归纳法，但合理使用二项式定理也是解此题的良策.

证法1 由 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}\Rightarrow\sqrt{ab}\geqslant 2$. 欲证的不等式的左边直接使用二项式定理有：

$(a+b)^n-a^n-b^n$

$=C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-2}a^2b^{n-2}+C_n^{n-1}ab^{n-1}$

$=\frac{1}{2}[(a^{n-1}b+ab^{n-1})C_n^1+(a^{n-2}b^2+a^2b^{n-2})C_n^2+\cdots]$

$\geqslant\sqrt{(ab)^n}(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})$

$\geqslant 2^n(2^n-2)$

$=2^{2n}-2^{n+1}$

证法2 作变换后应用二项式定理.

令 $a=1+\frac{1}{t}$，$b=1+t(t\in\mathbf{R}^+)$，结合 $a+b=ab$，

有 $(a+b)^n-a^n-b^n$

$=a^nb^n-a^n-b^n$

$=(a^n-1)(b^n-1)-1$

$=\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^n-1\right][(1+t)^n-1]-1$

$=(t^{-1}C_n^1+t^{-2}C_n^2+\cdots+t^{-n}C_n^n)(tC_n^1+t^2C_n^2+\cdots+t^nC_n^n)-1$

$\geqslant(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)^2-1$ （cauchy 不等式）

$=(2^n-1)^2-1$

$=2^{2n}-2^{n+1}$.

例9 数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 0)$，$a_n=[n\sqrt{2}]$ 求证：$\{a_n\}$中含有无穷多个完全平方.

分析 $(1+\sqrt{2})^n$ 的展开式可表示为 $x\sqrt{2}+y$ $(x,y\in\mathbf{N}^*)$的形式，故只需考虑$[n\sqrt{2}]$的整数性质.

证明 设 m 为正整数，由二项式定理知

$(\sqrt{2}+1)^m=x_m\sqrt{2}+y_m$，

$(\sqrt{2}-1)^m=x_m\sqrt{2}-y_m(x_m,y_m\in\mathbf{N}^*)$，两式相乘，得

$2x_m^2-y_m^2=1\Rightarrow 2x_m^2=y_m^2+1$ ③

所以 $2x_m^2>y_m^2\Rightarrow y_m<\sqrt{2}x_m$ ④

③式的两边同乘以 y_m^2，得



$2(x_m y_m)^2 \quad y_m^4 + y_m^2 > y_m^4$

所以 $y_m^2 < \sqrt{2} x_m y_m < 2x_m^2 = y_m^2 + 1$

记 $n = x_m y_m$，则 $a_n \quad [n\sqrt{2}] = y_m^2$ 是完全平方.这就证得了本题的结论

评注　构造不等式是成功的关键.

例 10　设数列 $g(n)$ 定义如下：

$g(1)=0, g(2)=1$，

$g(n+2)=g(n+1)+g(n)+1 \ (n \geqslant 1)$，

如果 n 是大于 5 的素数，求证：$n \mid g(n)[g(n)+1]$

分析　由 $g(n+2)=g(n+1)+g(n)+1$ 可求得通项　　项式模型，进而为利用数论知识铺平道路.

证明　令 $f(n)=g(n)+1$，则

$f(1)=1, f(2)=2$，

$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

由以上等式易推知 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$=\frac{1}{2^n}(C_{n+1}^1+5C_{n+1}^3+5^2C_{n+1}^5+\cdots+5^{\frac{n-1}{2}}C_{n+1}^n)$$

注意到 n 为大于 5 的素数，所以

$(2,n)=1 \Rightarrow (2^n,n)=1$，

且 $n \mid C_{n+1}^i (3 \leqslant i \leqslant n-1)$

由 $f(n)=\frac{1}{2^n}(C_{n+1}^1+5C_{n+1}^3+5^2C_{n+1}^5+\cdots+5^{\frac{n-1}{2}}C_{n+1}^n)$ 知，

$2^n f(n) \equiv (n+1)(1+5^{\frac{n-1}{2}})$

$\equiv 1+5^{\frac{n-1}{2}} \pmod n$，

$2^n(f(n)-1) \equiv 1+5^{\frac{n-1}{2}}-2^n$

$\equiv -1+5^{\frac{n-1}{2}} \pmod n$，

所以 $f(n)[f(n)-1] \equiv 1-5^{n-1} \equiv 0 \pmod n$，

而 $n \mid g(n)[g(n)+1] \Leftrightarrow n \mid f(n)[f(n)-1]$.

评注　本解法中用到了费尔马小定理，费尔马小定理是解决整除性问题的一个重要工具.变换数列使新数列的通项常规化　　项式模型是解题的关键.





思考交流

求 $1999^{1999^{\cdots^{1999}}}$（共有 1999 个 1999）末六位数字所组成的六位数.

解 设 $1999^{1999^{\cdots^{1999}}}$（共有 1999 个 1999）为 A，则 $A=1999^m$（$m=1999^{1999^{\cdots^{1999}}}$，共有 1998 个 1999），

显然 m 为奇数，由二项式定理可得，

$A=(2\times10^3-1)^m=(2\times10^3)^m-C_m^1(2\times10^3)^{m-1}+C_m^2(2\times10^3)^{m-2}-\cdots+(2\times10^3)C_m^{m-1}-1$

$=[2^m\times10^{3m-6}-2^{m-1}\times10^{3m-9}C_m^1+\cdots-2^2C_m^{m-2}]\times10^6+2000m-1$.

于是 A 的末六位数为 $(2000m-1)$ 的末六位数.

因为 1999^{2n}（$n\in N^*$）的末三位数字为 001，1999^{2n-1}（$n\in N^*$）的末三位数字为 999，而 $m=1999^n$，$n=1999^{1999^{\cdots^{1999}}}$（共有 1997 个 1999）为奇数，故 m 的末三位数字为 999，因而 $(2000m-1)$ 的末六位数为 $(2000\times999-1)$ 的末六位数为 997999，即为 $1999^{1999^{\cdots^{1999}}}$（共有 1999 个 1999）末六位数字所组成的六位数为 997999.



同步检测

一、选择题

1. 若 $(x\sqrt{x}-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中第 5 项的值为 $\frac{15}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n})$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

2. $\left(1+x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式里的常数项是（　　）

A. 4351　　B. 4352　　C. 4353　　D. 4354

3. $(x-1)(x^3+6x^2+12x+8)^3$ 的展开式中含 x^5 项的系数为（　　）

A. 2016　　B. -2016　　C. 756　　D. -756

4. $x(1+x)^n+x(1+x)^{n+1}+\cdots+x(1+x)^{2n}$ 展开式中 x^n 项系数的四个表达式中，错误的是（　　）

A. $C_n^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{2n}^{n+1}$　　B. $C_n^{n-1}+C_{n+1}^{n-1}+\cdots+C_{2n}^{n-1}$



C. C_{2n}^n-1　　　　D. $\frac{1}{n}(2n+1)\cdot\cdots\cdot(n+2)-n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1$

5. $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n$ 等于(　　)

A. $\frac{2^n-1}{n}$　　B. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$　　C. $2^{n+1}-1$　　D. $\frac{1}{n}(2^n-1)$

6. 若 $n=4m$，则 $C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots$ 的值为(　　)

A. 2^{2m}　　B. $(-1)^{m+1}\cdot 2^{2m}$　　C. $(-1)^m\cdot 2^{2m}$　　D. -2^{2m}

7. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$f_n=\frac{1}{n+1}(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)$，$g_n=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$，则 f_n 与 g_n 的大小关系为(　　)

A. $f_n\geqslant g_n$　　B. $f_n\leqslant g_n$　　C. $f_n>g_n$　　D. $f_n<g_n$

8. 设 $x=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$，则 x 的个位数字为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

二、填空题

9. $\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^k-\frac{1}{2}C_{2n}^n=$ ________

10. $C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0=$ ________.

11. 已知 $n\in\mathbf{Z}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 n^{2k} 除以 3 的余数一定为________.

12. 把 $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4$ 写成 $\sqrt{N+1}-\sqrt{N}$ 的形式，N 为自然数，则 $N=$ ________.

13. 1991^{2000} 除以 10^6，余数是 ________.

14. $N=19^{88}-1$ 的所有形如 $d=2^a\cdot 3^b$（a,b 为自然数）的因子之和为 ________.

15. $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n]$，使 a_n 为整数，且 $3\mid a_n$ 的 n 为 ________

16. 设 a,b 都是正整数，且 $a+b\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{100}$，则 ab 的个位数字是 ________.

三、解答题

17. 求证：$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^{n+1}$

18. 求和式 $\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot C_n^k$ 的值.

19. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 的系数满足：$0\leqslant a_i\leqslant a_0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 又设 $b_0,b_1,\cdots,b_{2n}$ 是多项式 $[f(x)]^2=b_0+b_1x+\cdots+b_{2n}x^{2n}$ 的系数，求证：$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[f(1)]^2$.

20. 设 $1\leqslant k\leqslant n$，考虑集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有含 k 个元素的子集及每一个这样子集中的最小元素，用 $F(n,k)$ 表示所有这样的最小数的算术平均值，求证 $F(n,k)=\frac{n+1}{k+1}$



第5讲　组合恒等式

知识点金

恒等式1　对于正整数n和k，有

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}. \tag{5.1}$$

证明　当$k>n$时，$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=0$.

当$1\leqslant k\leqslant n$时，有

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}&=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1}\\&=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}\\&=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

恒等式2　对于正整数n，有

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}. \tag{5.2}$$

证明　$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}\\&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n\cdot 2^{n-1}.\end{aligned}$$



恒等式 3 对于正整数 n,有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0. \tag{5.3}$$

证明 因为$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$,

将上式两边对 x 微分得

$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

在上式中,令 $x=-1$,有

$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=0$,

即$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$

由此可见,可以用二项式公式微分来导出组合恒等式.

恒等式 4 对于正整数 n,有

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}. \tag{5.4}$$

证明 将$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ 的两边对 x 微分得

$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

将上式两端同乘以 x 后再对 x 微分得

$$n[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}. \tag{5.5}$$

上式中,令 $x=1$,得

$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$.

恒等式 5 对于正整数 n,有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k^2=0. \tag{5.6}$$

证明 在式(5.5)中,令 $x=-1$,即得式(5.6).

恒等式 6 对于正整数 n,m 和 $p\leqslant\min\{m,n\}$,有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p} \tag{5.7}$$

证明 由于$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$,



又$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$，$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$，$(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$，

因此有

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k\right]=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$$

比较等式两边 x^p 的系数即得

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}.$$

评注 恒等式 6 还可以用组合分析的方法论证.

从 n 个不同的黑球和 m 个不同的白球共 $m+n$ 个球中取 p 个球有 $\binom{m+n}{p}$ 种方式. 这些方式可分为从 n 个不同的黑球中取 k 个黑球和从 m 个不同的白球中取 $p-k$ 个白球，当 $k=1,2,\cdots,p$ 时共 p 种类. 而由乘法规则，每类有 $\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ 种. 再由加法规则可得取球总数为 $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$. 于是式(5.7)成立.

恒等式 7 对于正整数 m，n，有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m}. \tag{5.8}$$

证明 在式(5.7)中，令 $p=m$ 即得式(5.8).

恒等式 8 对于任何正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}. \tag{5.9}$$

证明 在式(5.8)中，令 $m=n$ 即得式(5.9).

恒等式 9 对于非负整数 n 和 k，有

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}. \tag{5.10}$$

证明 对于固定的 k，对 n 使用归纳法证明.

当 $n=0$ 时，有

$$\binom{0}{k}=\binom{1}{k+1}=\begin{cases}1, k=0\\0, k>0\end{cases}$$

可见，当 $n=0$ 时，式(5.10)成立.

设式(5.10)对于任意整数 n 是成立的，则有

$$\sum_{l=0}^{n+1}\binom{l}{k}=\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}.$$



可见，式(5.10)对于 $n+1$ 也是成立的。由归纳原理，式(5.10)得证。

恒等式 10 对于所有实数 α 和非负整数 k，有

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k}. \tag{5.11}$$

证明 首先注意，这个恒等式与前面的恒等式有一个很不同的地方，这就是 $\binom{\alpha+j}{j}$ 和 $\binom{\alpha+k+1}{k}$ 是广义的二项式系数。由于对实数 α，应用广义二项式系数的意义，因此 Pascal 公式 $\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}$ 对于实数 α 和整数 k 也是成立的。于是反复使用 Pascal 公式就有

$$\begin{aligned}\binom{\alpha+k+1}{k}&=\binom{\alpha+k}{k}+\binom{\alpha+k}{k-1}\\&=\binom{\alpha+k}{k}+\binom{\alpha+k-1}{k-1}+\binom{\alpha+k-1}{k-2}\\&\cdots\\&=\binom{\alpha+k}{k}+\binom{\alpha+k-1}{k-1}+\binom{\alpha+k-2}{k-2}+\cdots+\binom{\alpha+1}{1}+\binom{\alpha+1}{0}\\&=\binom{\alpha+k}{k}+\binom{\alpha+k-1}{k-1}+\cdots+\binom{\alpha+1}{1}+\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{-1}\end{aligned}$$

而 $\binom{\alpha}{-1}=0$，故式(5.11)成立。

评注 广义二项式定理：设 α 是一个任意实数，则对于满足 $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ 的所有 x 和 y 有 $(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}$，

其中 $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

恒等式 11 对于非负整数 p,q,n，有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}. \tag{5.12}$$

证明 $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}&=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}\left(当 k>p 时，\binom{p}{k}=0\right)\\&=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{p+q-j}\quad(由式(5.8))\\&=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\left[\sum_{j=0}^{p+q}\binom{k}{j}\binom{n}{p+q-j}+\sum_{j=p+q+1}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{p+q-j}\right]\end{aligned}$$



$$\left(\text{当 } k<0 \text{ 时}, \binom{a}{k}=0\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\sum_{j=0}^{q}\binom{n}{p+q-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{q}\binom{n}{p+q-j}\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{k}{j} \qquad (*)$$

而 $\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{k}{j}=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\frac{q!}{(q-k)!\,j!\,(k-j)!}$

$$=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\frac{q!}{j!\,(q-j)!}\cdot\frac{(q-j)!}{(q-k)!\,(k-j)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{j}\binom{q-j}{q-k}$$

$$=\binom{q}{j}\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q-j}{q-k}$$

$$=\binom{q}{j}\left[\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q-j}{q-k}+\sum_{k<0}\binom{p}{k}\binom{q-j}{q-k}\right]$$

$$=\binom{q}{j}\sum_{k=-\infty}^{q}\binom{p}{k}\binom{q-j}{q-k}$$

$$=\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}\text{(由式(5.7))},$$

将上面的式子代入式($*$)得

$$\sum_{k}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\sum_{j}\binom{n}{p+q-j}\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}$$

$$=\sum_{j}\frac{n!}{(n-p-q+j)!\,(q-j)!\,(p-j)!\,j!}$$

$$=\sum_{j=0}\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\cdot\frac{p!}{j!\,(p-j)!}\cdot\frac{(n-p)!}{(q-j)!\,(n-p-q+j)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}$$

$$=\binom{n}{p}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}$$

$$=\binom{n}{p}\binom{n}{q}.$$

评注 用同样的方法可证明恒等式12.

恒等式 12 $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}$. (5.13)



通过上面的一些恒等式的证明，可以发现，证明恒等式常用的方法有：

(1)数学归纳法；

(2)利用二项式系数公式，特别是 Pascal 公式；

(3)比较级数展开式中的系数(包括二项式定理和以后要讲的母函数法)；

(4)组合分析法.



例题精析

例 1 证明下列恒等式：

(1)$\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k=n2^{n-1}$($n$ 为正整数)；

(2)$\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^m=\begin{cases}1, 若\ n=m\\ 0, n>m\end{cases}$($n$，$m$ 为正整数).

证明 (1)对 $k=1,2,\cdots,n$，有 $kC_n^k=k\cdot\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=nC_{n-1}^{k-1}$，

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k=\sum\limits_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}=n2^{n-1}$；

(2)当 $n=m$ 时，结论显然成立.

当 $n>m$ 时，由组合恒等式

$C_n^mC_m^k=C_n^kC_{n-k}^{m-k}(n\geqslant m\geqslant k)$，

有 $\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^m=\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}C_n^mC_{n-m}^{k-m}$

$=C_n^m\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^{n-m-(k-m)}C_{n-m}^{k-m}$

$=C_n^m\sum\limits_{i=0}^{n-m}(-1)^{n-m-i}C_{n-m}^{i}=C_n^m\times0=0$.

例 2 设$\{a_n\}(n\geqslant0)$和$\{b_n\}(n\geqslant0)$是两个数列，s 是非负整数，如果对任意的不小于 s 的整数 n，都有 $a_n=\sum\limits_{k=s}^{n}C_n^kb_k$.

则对任意的不小于 s 的整数 n，都有 $b_n=\sum\limits_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}C_n^ka_k$.

证明 设 n 是任一个不小于 s 的整数，则

$\sum\limits_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}C_n^ka_k$

$=\sum\limits_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\sum\limits_{i=s}^{k}C_k^ib_i$



$$=\sum_{k=i}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^ib_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^i\right]b_i.$$

由熟知的组合恒等式

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^i=\begin{cases}1,若 n=i\\0,若 n>i\end{cases}$$

即知$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^ka_k=b_n$. 证毕.

例 3 以 $g(m,n)$表示由 m 个元素集合 A 到 n 个元素集合 B 的满射的个数($m\geqslant n$). 求证:

$$g(m,n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kk^m.$$

证明 设 m 是任一取定的正整数,则对任一个正整数 n,由 m 元集合 A 到 n 元集合 B 的映射共有 n^m 个,其中使得 $f(A)$为 B 的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$元子集的映射有 $C_n^kg(m,k)$个. 由加法原则,有

$$n^m=\sum_{k=1}^{n}C_n^kg(m,k).$$

由二项式反演公式(这里 $a_n=n^m$,$b_k=g(m,k)$)得

$$g(m,n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kk^m.$$

例 4 用 $m(m\geqslant 2)$种颜色去涂 $1\times n$ 棋盘,每格涂一种颜色. 以 $h(m,n)$表示使得相邻格子异色且每种颜色都用上的涂色方法数,求 $h(m,n)$的计数公式.

解 用 m 种颜色去涂 $1\times n$ 棋盘,每格涂一种颜色且使得相邻格子异色的涂色方法共有 $m(m-1)^{n-1}$种,其中恰好用上 $k(2\leqslant k\leqslant m)$种颜色的涂色方法有 $C_m^kh(k,n)$种. 由加法原则,有

$$m(m-1)^{n-1}=\sum_{k=2}^{m}C_m^kh(k,n).$$

由二项式反演公式得

$$h(m,n)=\sum_{k=2}^{m}(-1)^{m-k}C_m^kk(k-1)^{n-1}.$$

同步检测

1. 用组合分析的方法证明恒等式:$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.



2. 用组合分析的方法证明$\frac{(2n)!}{2^n}$和$\frac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$都是整数.

3. 用组合分析的方法证明$\binom{n}{l}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$.

4. 证明恒等式$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

5. 证明恒等式$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$.

6. 证明恒等式:

(1)$\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$;

(2)$\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\binom{n}{m}2^{n-m}$;

(3)$\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$

7. 证明恒等式:

(1)$\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$;

(2)$\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^m\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$.

8. 证明:对所有实数r和整数k,有$\binom{-r}{k}=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}$.

9. 试求整数a、b和c,使对所有正整数m有$m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$,再求$1^3+2^3+\cdots+n^3$的值.

10. 证明组合恒等式$\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}$,并给出等式的组合意义.

11. 对正整数$n\geqslant 2$,证明组合恒等式$\sum\limits_{k=1}^{n}k\left[\binom{n}{k}-4\binom{n}{2k}\right]=0$

12. 设m为正整数,n为非负整数,证明组合恒等式$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^n\binom{m-1}{n}$.





第6讲　古典概型 $P(A)$ 的定义

知识点金

随机事件出现的概率，一般可以通过大量的独立重复试验得出其近似值，但对一些特殊类型的随机试验，事件的概率可依人们常识作合理的规定并使之满足实际需要，古典型随机试验就是这样的一类随机试验

一、古典概型的随机试验

如果一个随机试验 E 具有如下两性质就称 E 为古典概型的随机试验，简称古典概型。

1. E 的样本点个数有限；

2. 每个样本点出现的可能性相等.

换言之，如果一个随机试验 E 在一次试验中只有有限个等可能出现的结果，则称 E 为古典概型

例 1　E_1 任意抛掷一枚质料均匀的硬币，观察出现什么面，其样本点有 2 个，ω_1 出现正面，ω_2 出现反面．由于假设硬币质料均匀，可以认为出现正面与出现反面的可能性相等，所以 E 是古典概型.

例 2　号码锁有 3 个拨盘，每个拨盘上有 0 至 9 共 10 个数码．E 随机拨转三个拨盘，观察拨出一个由三个数码顺序组成的号码是什么．E 的样本点共有 $n=$ 1000 个．由于这 1000 个号码完全处于平等的地位，哪个号码都不会特别可能被拨到，所以这 1000 个样本点可以认为是等可能出现的．因之 E 是古典概型.

“样本点出现的可能性相等”是一个不定义的基本概念，只能做一些解释．考虑问题的条件，每个样本点都处于完全平等的地位，哪一个也不比其他特殊，这时就可把它们看成是等可能的．因之，是否“等可能”只能凭经验判断．当然，这种判断的正确性还可以通



过大量重复试验来检验.

二、古典概型 $P(A)$ 的定义

由于每一事件 A 总是由某些样本点组成，当且仅当组成 A 的样本点之一出现时 A 出现. 根据每个样本点是等可能出现的假定，我们对古典概型中事件 A 出现的概率 $P(A)$ 自然可作如下规定：

设 $P(A)$ 表示事件 A 出现的概率，n 表示 E 的样本点总数，m 表示属于事件 A 的样本点数（或称有利于 A 出现的样本点数），则

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

法国数学家拉普拉斯在 1812 年把上式作为概率的一般定义，现在通常称它为概率的古典定义，因为它只适用于古典概型.

在例 1 中，样本点总数 $n=2$. 设 A 表示出现正面的事件，则属于 A 的样本点只有 1 个，即 $m=1$，所以 $P(A)=\frac{1}{2}$. 这与前面说过的用大量重复试验得到的结果一致.

在例 2 中，设已知某个锁的开锁号码是 372. 今若有一个人，不知道这一号码，问试拨一次就能把锁打开的概率是多少?

用 A 表示试拨一次把锁打开的事件，我们有 $n=1000$，$m=1$，所以 $P(A)=\frac{1}{1000}$. 可见不知道开锁号码时，随便拨一次就能把锁打开的可能性极小.

一般地，在古典型随机试验中，直接计算一个事件 A 的概率的步骤是：

1. 先分析 E 是在什么条件下，做什么试验，观察什么.
2. 判明 E 是古典概型.
3. 求出 E 的所有不同的样本点数 n；分析属于事件 A 的所有不同的样本点数 m.
4. 求得 $P(A)=\frac{m}{n}$.

下面再举些例子来说明 $P(A)$ 的计算.



例 1 有 100 张已编号的卡片（从 1 号到 100 号），从中任取一张，求取到卡片号是 7 的倍数的概率.

解 (1) E：从编号为 1～100 号的 100 张卡片中任取一张，观察取到什么号码的卡片.



(2)一次试验可能取到100张卡片的任一张,所以有取到1号,2号,…,100号共100个可能结果,从而 $n=100$. 由于抽取卡片是任意的,因此这100个结果可认为是等可能的,从而 E 是古典概型.

(3)设 A 表示"取到的一张卡片其号码是7的倍数"的事件,我们可用枚举法列出这100个等可能结果中如下的一些结果:

$7(=7\times1),14(=7\times2),\cdots,98(=7\times14)$. 当且仅当这些结果之一出现,则 A 出现,可见 A 是由上述14个结果组成的,即

$A=\{7,14,\cdots,98\}$

故 $m=14$.

(4)所以 $P(A)=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$.

例2 一套书共有上、中、下三册,把它们任意放在书架的同一层上,各册自左至右或自右至左恰好成上、中、下顺序的概率是多少?

解 (1)本例的随机试验可看作:

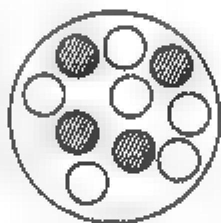
E:把上、中、下三册书任意作一个排列,观察它们的顺序.

(2)一次试验是把三册书作一个排列,所以,上、中、下的一个排列就是 E 的一个样本点. 因此 E 的样本点总数 $n=3!=6$. 又因书按任意顺序放到书架上,因此这6个排列中出现任意一个的可能性可认为相同,从而 E 是古典概型.

(3)用 A 表示"各册自左至右或自右至左恰成上、中、下的顺序"的事件. 则 A 由两个样本点"上中下"及"下中上"组成,即 $m=2$.

(4)所以 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

例3 袋中装有 N 个外形相同仅颜色不同的球,其中 $M(M<N)$ 个黑球,$N-M$ 个白球. 今从袋中任意取出 $n(0\leqslant n\leqslant N)$ 个球,求其中恰有 m 个黑球的概率($0\leqslant m\leqslant M,0\leqslant n-m\leqslant N-M$).



分析 这里 M,N,m,n 比较抽象,为了帮助思考,我们先分析这问题的一个特例.

设 $N=10,M=4,n=5,m=2$(如图所示). 即设袋中装有10个球,其中4个黑球,6个白球,从中任取5个球,问取出的5个球中恰有2个黑球的概率是多少?

我们把 E 看作是,从10个不同的(编了号)球中任取5个为一组,观察哪几个球被取出. 因此从10个不同的球中取出5个球的一个组合就是一个样本点,所以共有 C_{10}^5 个样本点. 由于取法是任意的,所以 C_{10}^5 个样本点可认为是等可能出现的,从而 E 是古典概型,$n=C_{10}^5$.

设 A 表示"取出的5个球中恰有2个黑球"的事件,我们来求属于 A 的样本点数 m.



m 实际上就是从袋中取出5个球，恰有2个黑球、3个白球的不同取法种数，而从袋中取出5个球恰有2个黑球3个白球，可以分两个步骤进行：第一步，先在4个不同的黑球中任取2个，有 C_4^2 种不同取法；第二步，从6个不同的白球中任取3个，共有 C_6^3 种不同取法. 由排列组合中所讲的乘法原理，从袋中取出5个球，恰有2个黑球3个白球的不同取法共有 $C_4^2 \cdot C_6^3$ 种，即 $m=C_4^2 \cdot C_6^3$.

所以 $P(A)=\dfrac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5}$.

现在我们对照这个特例来解一般问题.

解 (1)E：自 N 个不同的球中任取 n 个球为一组，观察取出哪些球.

(2)从 N 个不同的球中取出 n 个球的一个组合便是 E 的一个样本点，所以 E 有 C_N^n 个样本点. 因抽球是随机的，所以这些样本点可看作是等可能出现的，因之 E 是古典概型.

(3)令 A_m 表示"取出的 n 个球中含有 m 个黑球"的事件. 从 N 个不同的球中取出 n 个，其中恰有 m 个黑球，$n-m$ 个白球，可分两步进行. 第一步，先从 M 个不同的黑球中取 m 个，有 C_M^m 种不同取法；第二步，从 $N-M$ 个不同的白球中取 $n-m$ 个，共有 C_{N-M}^{n-m} 种不同取法，因之从 N 个球中取出 n 个，其中恰有 m 个黑球的不同取法总共有 $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ 种，这就是属于 A_m 的样本点数.

所以 $P(A_m)=\dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ $(m=0,1,2,\cdots,M)$.

说明 1° 本例的典型性在于球、黑球、白球是从产品、次品、正品等抽象来说，把球赋予其他实际意义，便成为另一实际问题. 上面的公式概括了 $A_0,A_1,\cdots,A_M$ 这一系列事件的概率，称它们服从超几何分布. 中学课本中的一些例题及习题是其特例. 如：

在100件产品中，有95件合格品，5件次品，从中任取2件，求：

(1)2件都是合格品的概率；

(2)2件都是次品的概率；

(3)1件是合格品，1件是次品的概率. 把产品看作球，次品看作黑球，合格品看作白球，于是 $N=100,M=5,n=2$，得解如下：

(1)$A_0=\dfrac{C_5^0 \cdot C_{95}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{893}{990}$；

(2)$A_2=\dfrac{C_5^2}{C_{100}^2}=\dfrac{1}{495}$；

(3)$A_1=\dfrac{C_{95}^1 \cdot C_5^1}{C_{100}^2}=\dfrac{19}{198}$.

2° 有的概率问题比较抽象. 不善于抽象思维的初学者可仿本例，先分析一个特例，



从中找到解决一般问题的办法. 如下面例 6,可以先分析 $n=3, N=5$ 的情况.

我们能把例 3 作进一步推广.

例 4 袋中装有 a 个黑球、b 个红球、c 个白球,从中任取 $\alpha+\beta+\gamma$ 个球,求其中恰有 α $(\alpha\leqslant a)$ 个黑球、$\beta(\beta\leqslant b)$ 个红球、$\gamma(\gamma\leqslant c)$ 个白球的概率.

解 仿例 3,所求概率是

$$p=\frac{C_a^{\alpha}\cdot C_b^{\beta}\cdot C_c^{\gamma}}{C_{a+b+c}^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

中学课本中有些例题和习题是本例的特例.

例 5 袋中有外形相同的 a 个黑球、b 个白球. 今把球随机地一个个摸出来,依次排列在一直线的 $a+b$ 个位置上,求第 k 次摸出的一个球是黑球的概率$(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

解法一 把 a 个黑球及 b 个白球都看作是不同的(例如设想把它们进行编号),把随机试验 E 看作:从装有 $a+b$ 个不同的球的袋中,每次取出一个排成一列,观察各球排在什么位置上,则一种排法就是 E 的一个样本点,所以 E 有 $(a+b)!$ 个样本点. 由于摸球是随机的,所以 $(a+b)!$ 个样本点是等可能的,即 E 是古典概型. 用 A 表示第 k 个位置上刚好排黑球的事件,我们来考察属于 A 的样本点数.

第 k 个位置上排黑球,由于有 a 个不同的黑球,故有 a 种不同的方法. 对每一种方法,另外的 $(a+b-1)$ 个球在其他位置上有 $(a+b-1)!$ 种排法,所以在 $a+b$ 个球的所有排列中,刚好第 k 个位置上排黑球的方法有 $(a+b-1)!\times a$ 种. 即 A 包含的样本点有 $(a+b-1)!\times a$ 个. 所以 $P(A)=\frac{(a+b-1)!\times a}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$.

解法二 把 a 个黑球看作是没有区别的,把 b 个白球也看作是没有区别的. 我们把随机试验 E 看作:在 $a+b$ 个位置上放置 a 个黑球而观察哪些位置放上黑球. 因此 E 的样本点总数是 C_{a+b}^{a} 个. 用 A 表示第 k 个位置上刚好放黑球的事件. 由于第 k 个位置放上黑球,剩下的 $a-1$ 个黑球可放在 $a+b-1$ 个位置的任意 $a-1$ 个位置上,所以属于 A 的样本点数是 C_{a+b-1}^{a-1}.

所以 $P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}$.

本例说明对一个给定的问题,可用不同方法分析随机试验 E,从而有不同的解法. 在这个例子中,如把摸球解释为抽签,说明抽签结果与先后次序无关.

三、复合随机试验与重复随机试验

例 6 先后抛掷两枚质料均匀的硬币,求:

1. 两枚都出现正面的概率;
2. 一枚出现正面、一枚出现反面的概率.

解 我们先分析这一随机试验的样本空间. 这里 E 是先后抛掷两枚硬币,观察这两



枚硬币出现的面.因此,一个样本点是由先后两枚硬币出现的面构成的.每枚硬币出现的面都有两种可能结果,所以搭配起来一共有以下四种可能结果,即有 4 个样本点:

$$正\begin{cases}正,\\反,\end{cases}即\begin{matrix}(正,正),\\(正,反);\end{matrix}\quad 反\begin{cases}正,\\反,\end{cases}即\begin{matrix}(反,正),\\(反,反).\end{matrix}$$

我们记作:$\Omega=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$

这 4 个样本点可看成是等可能的,因之 E 是古典概型.设 A 表示"两枚都出现正面"的事件,B 表示"一枚出现正面,一枚出现反面"的事件,则易见 $A=\{$(正,正)$\}$,$B=\{$(正,反),(反,正)$\}$.

所以 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

这个例子是复合随机试验的特例.下面介绍复合随机试验的概念.

设给定两个随机试验 E_1 和 E_2,我们把(E_1,E_2)看成一个复合随机试验 $\widetilde{E}$.把 $\widetilde{E}$ 做一次试验,相当于把 E_1,E_2 顺次各做一次试验,$\widetilde{E}$ 的试验结果由两次试验 E_1 和 E_2 的结果顺次联合组成.称 $\widetilde{E}$ 是由 E_1,E_2 组成的二次复合随机试验,记作 $\widetilde{E}=E_1\times E_2$.

设 E_1 的样本点记为 $\omega^{(1)}$,E_2 的样本点记为 $\omega^{(2)}$.则 $\widetilde{E}$ 的样本空间由全体有序对$(\omega^{(1)},\omega^{(2)})$构成.例如 E_1:掷一枚硬币;E_2:从装有红、黑、白三球的袋中任摸一球.则 $\widetilde{E}$ 的样本空间由下列有序对组成.

$\widetilde{\Omega}=\{$(正,红),(正,黑),(正,白),(反,红),(反,黑),(反,白)$\}$.

当 $E_1=E_2=E$ 时,记 $\widetilde{E}=E^2$,并称为 E 的二次重复试验.若 E 的样本点有 k 个,则 E^2 的样本点有 k^2 个.一般地可把复合随机试验及重复随机试验的次数推广到 n 次.

例如:设 E 是一个随机试验,其样本空间为$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k\}$,则 E 的 n 次重复试验 $\widetilde{E}=E^n$ 的一个样本点是由 n 个有序的ω 组成:$(\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2,\cdots,\widetilde{\omega}_n)$.其中每一个$\widetilde{\omega}_i(i=1,2,\cdots,n)$可以取$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k\}$中的某一个,如$(\omega_2,\omega_1,\omega_1,\cdots,\omega_1)$,$(\omega_1,\omega_2,\omega_2,\cdots,\omega_1)$等等都是 E^n 的样本点.易见 E^n 的样本空间共有如上的 k^n 个不同的样本点.

例 7 有 n 个人,每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$间房的每一间中.试求下列各事件的概率:

A:某指定的 n 间房中各有 1 个人;

B:恰有 n 间房,其中各有 1 个人;

C:某指定房中恰有 $m(m\leqslant n)$个人.

解 设 E 表示"把一个人分配到某房间,观察分配到哪一间"的随机试验.一种分法



就是 E 的一个样本点，因为有 N 间房，所以 E 有 N 个样本点。本例把 n 个人分配到 N 间房中，可看作 E 的 n 次重复试验 $\tilde{E}=E^n$，故 E 有 N^n 个样本点，一个样本点相应于 n 个人的一种分配法。例如 $(2,1,2,\cdots,5)$ 表示第一个人分配到第二间房，第二个人分配到第一间房，第三个人分配到第二间房，…，第 n 个人分配到第五间房，由于每个人都以等概率 $\frac{1}{N}$ 被分配到 N 间房的每一间中，所以 N^n 个样本点是等可能的，即 $\tilde{E}$ 是古典概型。

(1)属于 A 的样本点数：即指定了 n 间房把 n 个人分配到这 n 间房中使每间房恰有一人的所有不同的分配方法数。由排列知识有 $n!$ 种，所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2)属于 B 的样本点数：B 与 A 不同之处在于 n 间房可从 N 间中任意选出，有 C_N^n 种选法，对每一种选出的 n 间房其中各有一人的分配法都有 $n!$ 种，所以 B 包含的样本点数是 $n!\,C_N^n$。所以

$$P(B)=\frac{n!\,C_N^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

(3)属于 C 的样本点数：m 个人可从 n 个人中任意选出，共有 C_n^m 种选法，当这 m 个人分配到指定的房中时，其余 $n-m$ 个人可以任意分配到其余的 $N-1$ 间房里，每人都有 $N-1$ 种分配法，共有 $(N-1)^{n-m}$ 个方法，故 C 共包含 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$ 个样本点，所以

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}.$$

例 6 从 $1,2,\cdots,10$ 共 10 个数中任取一个，设每个数被取到的概率都是 $\frac{1}{10}$，取后还原，再取下一个，先后取出 7 个数，试求下列各事件 $A_i(i=1,2,3)$ 的概率。

A_1：7 个数全不相同；

A_2：不含 10 与 1；

A_3：10 恰好出现两次。

解 设 E："从 10 个数中任取一个，观察取到什么数"，则 E 有 10 个样本点。本例为 $\tilde{E}=E^7$，共有 10^7 个样本点，且为等可能的，故 $\tilde{E}$ 为古典概型。易见

$$P(A_1)=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{10^7}\approx0.06,\ P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}.$$

由于 7 次中 10 恰出现 2 次，可以是 7 次中的任两次，故有 C_7^2 种可能，这 C_7^2 种可能的每种都已有 2 次取 10，其他 5 次每次只能取剩下的 9 个数中的任一个，故

$$P(A_3)=\frac{C_7^2\cdot9^5}{10^7}.$$



上面我们介绍了古典概型$P(A)$的定义及从定义出发求$P(A)$的一般步骤，并且由易到难地举了10个例子. 现在我们再作一些简要的说明：

1° 例1、例2是较简单的古典概型问题，其特点是从所给问题中能比较容易看出随机试验E是什么，并用枚举法或者借助于排列、组合的工具来得m和n；例3、例4的抽球问题具有典型性，中学课本中有许多例题与习题可归结为它们的特例；例6～8是复合试验的例子，例7和例8相对来说较难些. 例5说明对一个给定的问题，可用不同观点分析随机试验E，从而有不同的解法.

2° 中学课本"等可能性事件的概率"一节给出等可能性事件概率的计算方法，"如果一次试验中共有n种等可能出现的结果，其中事件A包含的结果有m种，那么事件A的概率$P(A)=\frac{m}{n}$，这实际上就是古典概率的定义".

在教学中，应通过较简单的范例(如例1、例2)着重分析：(1)对一个具体问题来说，所谓做"一次试验"是指在什么条件下做一次什么试验，观察什么.(2)做"一次试验"有几种可能出现的结果，求出n，并分析这些结果在所给条件下是否可认为是等可能出现的.(3)所求事件A是什么，什么叫作做一次试验事件A出现，A包含m种结果是什么意思，从而分析如何求m. 在例题的配置上，应从易到难，通过简单问题着重讲清出现的一些新概念.

思考交流

对于古典概型，概率具有以下性质：

(1)$P(A)\geqslant 0$；　　　　(非负型)

(2)$P(\Omega)=1$；　　　　(规范性)

(3)设事件$A_1,A_2,\cdots,A_m$彼此互斥，则$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)$.　　　　(有限可加性)

证　设n为古典型随机试验E的样本点总数.

(1)设A包含的样本点数为m，由于$\frac{m}{n}\geqslant 0$，所以$P(A)\geqslant 0$.

(2)$P(\Omega)=\frac{n}{n}=1$.

(3)设属于A_i的样本点有k_i个，则$P(A_i)=\frac{k_i}{n}$. 由于$A_1,A_2,\cdots,A_m$彼此互斥，所以它们所含的样本点是互不相同的. 所以事件$\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$包含$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$个不同的样本点.



所以 $P(\sum_{i=1}^{m}A_i)=\frac{\sum_{i=1}^{m}k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$.

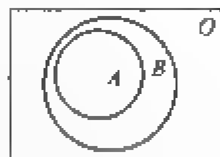
推论 1 对立事件的概率：对任意事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A)$

证 因为 $A\bar{A}=\varnothing$，$A+\bar{A}=\Omega$；所以 $1=P(\Omega)=P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$，

所以 $P(\bar{A})=1-P(A)$

这是概率计算的一个重要公式，在实际计算中常被用到

推论 2 减法公式：若 $A\subset B$（如图），则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$



证 因为 $A(B-A)=\varnothing$，$B=A+(B-A)$，所以 $P(B)=P(A)+P(B-A)$，所以 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

推论 3 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证 由推论 2，$P(B)-P(A)=P(B-A)$，因为 $P(B-A)\geqslant 0$，所以 $P(A)\leqslant P(B)$.

例 1 在 20 件产品中，有 15 件是一级品，5 件是二级品．今从中任取 3 件，问其中至少有一件是二级品的概率是多少？

解法一 设 A："所抽三件中，至少有一件是二级品"；

A_1："所抽 3 件中，恰有一件是二级品"；

A_2："所抽 3 件中，恰有二件是二级品"；

A_3："所抽 3 件中，恰有三件是二级品"．

易见 A_1，A_2，A_3 彼此互斥且 $A=A_1+A_2+A_3$．

所以 $P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$$=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}+\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}+\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{137}{228}.$$

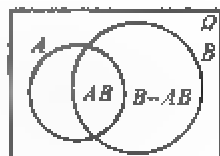
解法二 设 A 表示所抽 3 件中至少有一件是二级品的事件，则 $\overline{A}$ 表示所抽 3 件中没有一件是二级品，即全是一级品的事件．

因为 $P(\overline{A})=\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{91}{228}$，所以 $P(A)=1-P(\bar{A})=\frac{137}{228}$.

推论 4 一般加法公式：对任意事件 A 与 B，有

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证 因为 $A(B-AB)=\varnothing$，$A\cup B=A+(B-AB)$（如图），



所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$.

又 $AB\subset B$，由推论 2 得：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

若 A、B 互斥，则 $AB=\varnothing$，故 $P(AB)=0$，上式化为．

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.



例 2 学校组织数学、作文两项竞赛，某班 50 名学生中有 15 名参加数学竞赛，10 名参加作文竞赛，其中有 5 名是同时参加两项竞赛的. 今在该班任抽一名学生，问抽到的人是参加竞赛的学生的概率是多少？

解 任抽一人，"是参加数学竞赛的学生"的事件记为 A，"是参加作文竞赛的学生"的事件记为 B. 今要求 $P(A\cup B)$. 因为 A、B 不互斥，应用一般加法公式得：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{50}+\frac{10}{50}-\frac{5}{50}=\frac{2}{5}.$$

一般加法公式可推广到 n 个事件的情况. 例如先把 $A\cup B$ 看作一个事件，则可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cup B)C]\\&=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

利用数学归纳法可以证明，对于任意 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥，则上式中各个 $P(A_iA_j)$，$P(A_iA_jA_k)$，$\cdots$，$P(A_1A_2\cdots A_n)$ 都是零，故上式变成：$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

这就是概率的有限可加性.

例 3 某圆柱形产品，只要底直径、高、光洁度之一不合格便为次品. 设在 1000 个圆柱形产品中，底直径尺寸不合格的 15 件，高尺寸不合格的 10 件，光洁度不合格的 20 件，这些次品中，底直径、高尺寸都不合格的 4 件，光洁度与高尺寸都不合格的 8 件，光洁度与底直径尺寸都不合格的 6 件，三者全不合格的 2 件. 今在这批产品中任取一件，求取到次品的概率.

解 从产品中任取一件，记

A："取到底直径尺寸不合格的产品"；

B："取到高尺寸不合格的产品"；

C："取到光洁度不合格的产品".

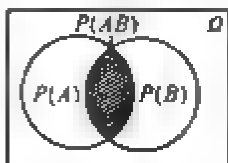
则所求概率为

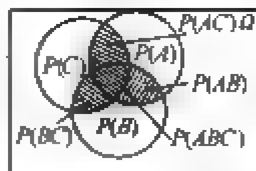
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{15}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{20}{1000}-\frac{4}{1000}-\frac{6}{1000}-\frac{8}{1000}+\frac{2}{1000}=\frac{29}{1000}\end{aligned}$$

说明 1° 利用下一节几何概率的知识，借助韦恩图可把 $P(A)$ 理解为 Ω 的面积是 1 单位时图形 A 包围的面积. 这样，借助 F 图，公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可直观理解为 $A\cup B$ 的面积等于 A 的面积加上 B 的面积减去 AB 的面积. $P(A\cup B\cup C)$ 的



公式、推论 1 至推论 4 的各结论都可用这个办法来帮助记忆.





2° 在计算几个事件至少出现一个的概率时，首先应当判别它们是否互斥. 在中学课本中介绍互斥事件有一个出现的概率时，应通过各种办法突出"互斥"两字，如通过韦恩图，互斥即无交，亦可通过举反例以加深印象. 如：甲、乙二人射击同一目标，设甲射击一发子弹，击中目标的概率是 0.8，乙射击一发，击中目标的概率是 0.9. 今甲、乙二人同时射击一发，问至少有一发击中目标的概率是多少? 在这里，甲击中目标的事件 A 与乙击中目标的事件 B 是不互斥的. 乱用求互斥事件和的概率的公式，将得到至少有一发击中目标的概率是 $0.9+0.8=1.7$ 的错解.

在中学课本中，没介绍一般加法公式，遇到求几个不互斥事件并的概率，主要思路有二，今以求 $P(A\cup B)$ 为例：

一是把 $A\cup B$ 化为互斥事件 AB、$A\overline{B}$ 及 $\overline{A}B$ 之和，然后利用互斥事件之和求概率的公式计算，即

$A\cup B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$

由此得 $P(A\cup B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$.

二是利用推论 1：

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})$.

这两种方法再继续做下去都要用到概率的乘法公式

同步检测

1. 电话号码由 0,1,2,…,9 中的五个数码组成(可重复使用数码). 从这些电话号码中任取一个，问它是由不同的五个数码组成的电话号码的概率是多少?

2. 一块各面都涂有油漆的正方体，今把各棱 10 等分，锯成 1000 个同样大小的小正方体. 把这些小正方体均匀搅混在一起，试求从中任意取出的一个小正方体其两面涂有油漆的概率.

3. 把 10 本书任意排在书架的一层上，求其中指定的三本书排在一起的概率.

4. 某化工产品要用 3 种原料配制，每种原料可有 4 种不同的用量. 今要通过试验，确



定每种原料究竟用多少最佳．设最佳方案只有 个，今任选其中两个方案进行试验，问这两个方案中恰有一个是最佳方案的概率是多少？

5．有 100 张编了号码（1～100）的卡片，从中任取一张，求：

（1）卡片号是奇数的概率；

（2）卡片号能被 10 或 11 整除的概率．

6．把一枚质料均匀的硬币连掷三次，出现 2 个正面 1 个反面和出现 1 个正面 2 个反面的概率各是多少？

7．某种产品 90 件，其中甲等品 40 件，乙等品 30 件，丙等品 20 件．在运送这些产品的路上损坏了 3 件，如果每件产品损坏的可能性相同，试计算这三等产品中恰好各损坏 1 件的概率．

8．在 0 至 9 这十张数码卡片中，任取 4 张排成一列，问能排成一个四位偶数的概率是多少？

9．在编号为 1～20 的 20 张卡片中任取 3 张，问：（1）有一张号码能被 3 整除的概率；（2）至少有一张号码能被 3 整除的概率．

10．今有 4 张写有 1，2，3，4 数码的卡片，用它们任意组成一个四位数，求这四位数是“以 1 为首位或以 4 为末位”的概率．

11．袋中放有 2 枚伍分硬币，3 枚贰分硬币，5 枚壹分硬币，任取其中 5 枚，求总数超过一角的概率．

12．调查某市教工订报情况，有 20%订阅甲报，16%订阅乙报，14%订阅丙报，其中有 8%订阅甲、乙两报，5%订阅甲、丙两报，4%订阅乙、丙两报，2%订阅甲、乙、丙三报．今在市教工中任抽一名，问该教工至少订阅一种报纸的概率是多少？

13．向三个相邻的军火库投掷一枚炸弹，炸中第一军火库的概率是 0.025，其余两个各为 0.1，只要炸中一个，另两个也要爆炸．求投一弹使军火库爆炸的概率．

14．一批产品共 100 件，其中 5 件是次品，任意地取出该批产品的一半进行检验，如果在 50 件产品中的次品数不多于 1 件，则该批产品被接收，求该批产口被接收的概率．



第7讲　几何概型

知识点金

古典概型可以准确地计算出某事件 A 的概率，但样本点数为有限的约束，使得应用上受到很大的限制. 我们可以用几何方法解决样本点数无限而又有某种等可能性的另一类随机试验问题.

例题精析

例1　在边长为4的正方形中有一个半径为1的圆，今向此正方形中随机投一质点，问此点落在圆内的概率是多少?

分析　由于投点的随机性，可以认为质点落在正方形中任意面积相等的图形内的可能性是一样的，并且这种可能性与图形面积成正比. 质点落在正方形中是必然的，其概率应为1，因此所求的概率自然应认为是圆的面积 π 与整个正方形面积16之比，即 $\frac{\pi}{16}$.

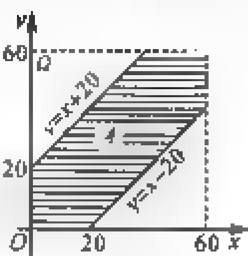
评注　一般地，设随机试验 E 是向某区域 Ω 中任意投掷一质点 M，其结果可能是区域 Ω 中的任一点，Ω 可以是一维的、二维的，甚至可以是更高维的，这时样本空间 Ω 是无限点集，且大于零的有限测度(直观地说，对一、二、三维区域的测度分别是长度、面积、体积)，并设点 M 落在 Ω 中的任一可测区域 A 内的概率与区域 A 的测度成正比，并且与其位置及形状无关. 由于 Ω 是无限点集，故不能用古典概率定义计算事件"M 落在 A 中"的概率，但考虑到等可能性，若以 $P(A)$ 表示"M 落在区域 A 中"的概率，则自然应定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}.$$



这就是所谓几何概型概率的定义

例 2 两人相约七点到八点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，20 分钟等不到另一人即可离去，试求这两人能会面的概率.



解 设两人分别在七点零 (x,y) 分到达某地 $(0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60)$，满足这样条件的一个点 (x,y) 就是本例随机试验的一个样本点，全体样本点构成边长为 60 的正方形 Ω 里的点(如图). 它是这一随机试验的样本空间，令 A 表示两人能会面的事件，两人能会面的充要条件是

$$\begin{cases} |y-x|\leqslant 20, & (1) \\ 0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60. & (2) \end{cases}$$

式(1)即

$$\begin{cases} y\geqslant x-20, \\ y\leqslant x+20. \end{cases}$$

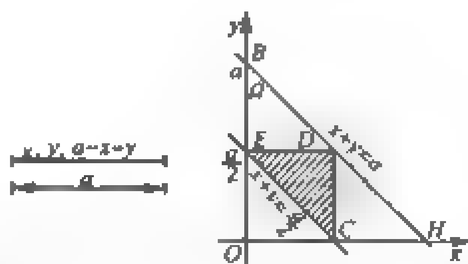
所以两人能会面的样本点构成的区域 A 由图所示阴影部分表示.

所以 $P(A)=\dfrac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\dfrac{60^2-40^2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$.

例 3 把长度 $a(a>0)$ 的线段 l 任意折成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解 如图，设所折两线段长为 x、y，则另一线段长为 $a-x-y$. 由于要把 l 折成三线段，所以 x、y 应满足：

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ a-x-y>0. \end{cases}$$



上述不等式组的点是图中 $\triangle HBO$ 内的点. 这就是本例的样本空间 Ω. 把 l 折成三段的一种折法对应于 Ω 中的一个点.

令 A 表示折断的三线段能构成一个三角形的事件. 折断的三线段能构成一个三角形的充要条件是：



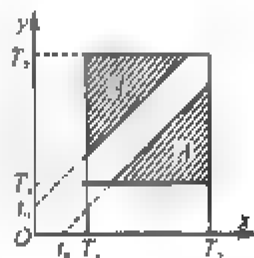
$$\begin{cases} x+y>a-x-y, \\ x+(a-x-y)>y, \\ y+(a-x-y)>x; \end{cases} \text{即} \begin{cases} x+y>\dfrac{a}{2}, \\ y<\dfrac{a}{2}, \\ x<\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

这个不等式组表示图中△CDE内的点，由几何概率定义得

$$P(A)=\frac{\triangle CDF\text{的面积}}{\triangle HBO\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a^2\right)}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

评注 若把本例改为：把长度为$a(a>0)$的线段任意折成三段，求它们可以构成一个正三角形的概率. 容易看出，这里Ω仍为△OHB内的点，而事件A："折断的三线段能构成正三角形"只由△OHB中的一个点$\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$构成，其面积为0，所以$P(A)=0$. 尽管$P(A)=0$，但是事件A不是不可能事件，这是概率为0但不是不可能事件的一个例子.

例4 两人约好在某一地点会面，在时刻T_1到T_2之中到达，假定他们在T_1至T_2之间的任何时刻到达都是等可能的，试求其中一人必须等另一人的时间不小于t_0的概率.



解 以x,y表示两人到达的时刻，则

$\Omega=\{(x,y): T_1\leqslant x\leqslant T_2, T_1\leqslant y\leqslant T_2\}$.

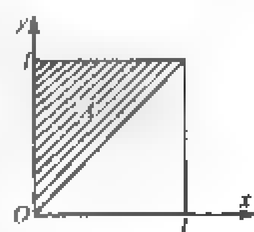
一人等另一人的时间不少于t_0的充要条件：$|x-y|\geqslant t_0$. 故

$A=\{(x,y): y\leqslant x-t_0 \text{ 或 } y\geqslant x+t_0\}$，

画出Ω、A的区域，

故所求概率 $P=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\dfrac{(T_2-T_1-t_0)^2}{(T_2-T_1)^2}=\left(1-\dfrac{t_0}{T_2-T_1}\right)^2$.

例5 在长为l的线段AB上随机投两个质点L和M，求点L离点A比点M离点A近的概率是多少？（设点L、M在AB上都是均匀分布的）



解 在长为l的线段AB上随机投两个质点L、M，设L离点A的距离为x，M离点A的距离为y，随机投两点，则$\Omega=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant y\leqslant l\}$，L点离点A比M点离点A近的充要条件：$0\leqslant x\leqslant y\leqslant l$.

故$A=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant y\leqslant l\}$，作A、$\Omega$区域图，所求概率$P=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\dfrac{1}{2}$.

例6 设二维点(p,q)在$|p|\leqslant 1$，$|q|\leqslant 1$中按均匀分布出现，试求方程$x^2+px+q=$



0 的二根，

(1)都是实数的概率 p_1；

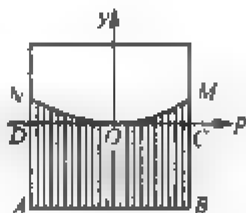
(2)都是正数的概率 p_2.

解 基本事件空间 $\Omega=\{(p,q):|p|\leqslant 1,|q|\leqslant 1\}$.

(1)为使二根为实数，必须且只须：$p^2\geqslant 4q$，这条件决定区域 $ABMN$，MN 是抛物线. $p^2=4q$，$|q|\leqslant 1$.

$$P_1=\frac{ABMN\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{ABCD\text{ 的面积}+DCMN\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{13}{24},$$

(2)为使二根为正，(p,q)必须且只须落在区域 S 中：



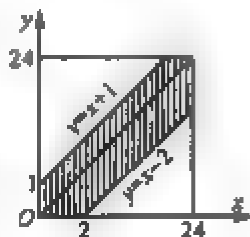
$$S:\begin{cases}p^2\geqslant 4q\\ p<0\\ q>0\end{cases}$$

区域 S 就是区域 NDO，$P_2=\dfrac{NDO\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\dfrac{1}{48}$

评注 这里阴影部分 $DCMN$ 的面积为$\dfrac{1}{6}$，NDO 的面积为$\dfrac{1}{12}$，具体计算涉及定积分知识，这里忽略.

例 7 两船欲靠同一码头，设两船独立地到达，而且各自到达时间在一昼夜间是等可能的(即均匀分布的). 如果此两船在码头的停留时间分别是 1 小时及 2 小时，试求有一船要等待空出码头的概率.

解 设甲船到达时刻为 x，乙船到达时刻为 y，则基本事件空间为



$\Omega=\{(x,y),0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}$.

甲船停留时间$[x,x+1]$，乙船停留时间$[y,y+2]$

甲船要等待码头，这意味着：在乙船停留期间，甲船到达，即 $y\leqslant x\leqslant y+2$.

乙船要等待码头，这意味着：在甲船停留期间，乙船到达，即 $x\leqslant y\leqslant x+1$.

设有一船要等待空出码头为事件 A，则

$A=\{(x,y),y\leqslant x\leqslant y+2\text{ 或 }x\leqslant y\leqslant x+1\}$，

A 为图中阴影区域

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{24\times 24-\frac{1}{2}\times 23\times 33-\frac{1}{2}\times 22\times 22}{24\times 24}=0.121.$$

例 8 在长为 l 的线段 AB 上随机放两点 L 与 M，点 L 离点 M 比离点 A 近的概率是多少？

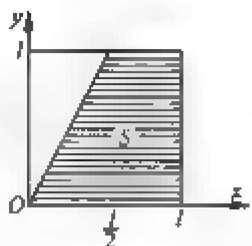




解 设 L,M 到点 A 距离分别为 x,y,随机放两点 L,M.故

$\Omega=\{(x,y),0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant y\leqslant l\}$,

点 L 离点 M 比离点 A 近,要求点(x,y)在 S 中取,S 为

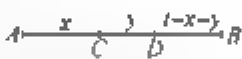


$$S:\begin{cases}|x-y|<x\\0\leqslant x\leqslant l\\0\leqslant y\leqslant l\end{cases}$$

$$S\text{ 可化简为}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant l\\0\leqslant y\leqslant l\\0<y<2x\end{cases}$$

$$\text{故 }P=\frac{S\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{l^2-\frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{2}l}{l^2}=\frac{3}{4}.$$

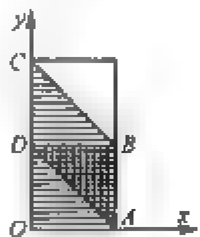
例 9 长为 l 的铁线随机折成两线段,较长的一段再随机折成两线段.试计算所得的这三部分能组成三角形的概率.



解 设铁线先折成 AC,CB 两段,然后 BD 再折成 CD,DB 两段,设 $AC=x$,$CD=y$,依题意,基本事件空间 Ω 为

$$\Omega:\begin{cases}0<x<\frac{l}{2}\\0<y<l\\0<x+y<l\end{cases}$$

所截三线段要能组成三角形,则(x,y)在 S 中取,S 为



$$S:\begin{cases}x+y>l-x-y\\x+(l-x-y)>y\\y+(l-x-y)>x\end{cases}$$

$$S\text{ 化简为}\begin{cases}x+y>\frac{l}{2}\\y<\frac{l}{2}\\x<\frac{l}{2}\end{cases}$$

画出 Ω,S 区域图.

Ω 为$(OABC)$,S 为(ABD),故 $P=\dfrac{S\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\dfrac{1}{3}$.

例 10 (最近星体的距离的分布)在天体统计中,需要研究下列问题:设 A 为一固定星球,试求与 A 最邻近的星与 A 的距离不超过 x 的概率 $F(x)$



解 如果不对在 A 周围的星的密集程度作任何假定，问题是无法解决的，根据天文的观察，我们假设：

(1)以 A 为中心作一球 C，体积为 V，以 N 表示位于 V 中的星数，则

$\lim\limits_{V\to\infty}\frac{N}{V}=\lambda$($\lambda$ 为某常数)

(2)星在 V 中相互独立地分布

以 U 表示中心为 A，半径为 x 的球 S 的体积，由后一假设 C 中星都不在 S 中的概率为 $\left(1-\frac{U}{V}\right)^{N}$，利用(1)并注意 $U=\frac{4}{3}\pi x^{3}$ 得

$$F(x)=1-\lim_{V\to\infty}\left(1-\frac{U}{V}\right)^{N}=1-e^{-\frac{4}{3}\lambda\pi x^{3}}.$$

λ 随星球 A 而异，如 A 为太阳，由天文学知识，可取 $\lambda=0.0063$.



思考交流

例 平面上画着一些平行线，它们之间的距离都等于 $a(a>0)$，向此平面任投一根长度为 $l(l<a)$ 的针，试求此针与任一平行线相交的概率.



图 1

解 以 y 表示针的中点到最近一条平行线的距离，φ 表示针与平行线的交角(如图 1). 易见，Ω 由满足 $0\leqslant y\leqslant\frac{a}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 的矩形 $OBCD$ 内的点构成(如图 2). 设 A 表示针与一平行线相交的事件，针能与一平行线相交的充要条件是

$$0\leqslant y\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

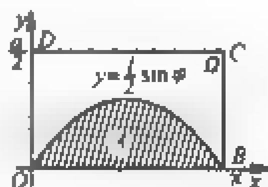


图 2

满足这不等式组的点构成 Ω 中的子集 A，据几何概率定义得

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{2l}{\pi a}.$$

评注 1° 这里 A 的面积计算要用到高等数学积分知识，这里忽略.

2° 这是 1777 年法国数学家蒲丰提出的问题，称为蒲丰投针问题，由于最后答案与 π 有关，可利用这一随机试验来计算 π 的近似值，其方法是投针 N 次，记下针与直线相交的次数 n，以频率 $\frac{n}{N}$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值代入上式得



$\pi\approx\frac{2lN}{an}$.

本例是蒙特卡洛方法(以概率论为基础的一类计算方法)的简单例子,由于电子计算机的发展,近年来,蒙特卡洛方法在迅速发展.

3° 可以证明几何概率具有与古典概率类似的非负性、规范性及可加性(可列可加性),这里略去.

同步检测

1. 容器内装有气体,把容器分为体积相等的两部分 A、B,分子在容器内不断运动,试求在时刻 t,某一分子落入 A 的概率.

2. 连接甲、乙两镇的长为 $2a(a>0)$ 的电话线被台风吹断(如图所示),求:

甲 乙 O $2a$ x

(1)断点在 $\frac{a}{2}$ 与 $\frac{3a}{2}$ 之间的概率 p_1;

(2)断点与两镇中点的距离不超过 b 的概率 p_2.

3. 在半径为 R 的圆内画平行弦,如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,求这些平行弦中的任一条的长度大于 R 的概率.

4. 在线段$[0,a]$上任意投三个点,试求由点 O 到三点的三条线段能构成一个三角形的概率.



第8讲　概率与统计

知识点金

1. 等可能事件的概率

若在一次试验中有 n 种等可能出现的结果，而事件 A 包含的结果有 m 种，则事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

2. 互斥事件有一个发生的概率

若事件 A 和 B 互斥，则事件 $A+B$ 发生的概率等于事件 A 和 B 分别发生的概率和，即 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

3. 相互独立事件同时发生的概率

若事件 A 和 B 相互独立，则事件 $A\cdot B$ 发生的概率等于事件 A 和 B 分别发生的概率积，即 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

4. n 次独立重复试验事件 A 恰好发生 k 次的概率

若在一次试验中某事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$.

5. 对任意的事件 A 和 B，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

6. 对任意的事件 A 和 B，$A-B$ 表示 A 发生且 B 不发生，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

7. 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率. 若 $P(A|B)=P(A)$，则 A 和 B 相互独立



8. 全概率公式

如果样本空间 I 可以分析为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，即 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = I$，并且 $B_i \cap B_j = \varnothing(1 \leqslant i < j \leqslant n)$，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$.

9. 贝叶斯公式

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 I 的分析，则有 $P(B_i \mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$.

10. 若离散型随机变量 ξ 的所有可能值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，以及它们的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$，则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望，称 $D\xi=p_1(x_1-E\xi)^2+p_2(x_2-E\xi)^2+\cdots+p_n(x_n-E\xi)^2+\cdots$ 为 ξ 的方差.

重要等式：① $E(a\xi+b)=aE\xi+b$；

② $D(a\xi+b)=a^2D\xi$.



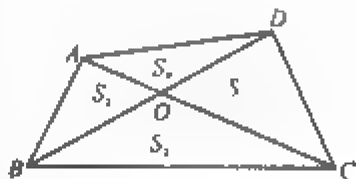
例题诗析

例 1 8 次射击，命中 3 次，其中恰有 2 次连续命中的概率是多少？

分析 这是古典概型，分别计算出此事件包含的结果数和所有结果数计算便得.

解 将 2 次命中与 1 次命中的情形看作 2 个元素，插入 5 个位子的 6 个空，可知符合条件的情形有 $P_6^2=6\times5=30$ 种，而所有情形的总数为 $C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$，故所求的概率为 $\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$.

例 2 如图所示，四边形 $ABCD$ 被其对角线分为 4 个不同的三角形 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle OAD$. 若每个三角形用 4 种颜色中的一种涂染，那么，出现相邻三角形均不同色的四边形的概率是多少？



分析 分别以 S_1、S_2、S_3、S_4 依次记 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle OAD$，可按 S_1 和 S_3 同色与 S_1 和 S_3 不同色分类讨论计算.

解 分别以 S_1, S_2, S_3, S_4 依次记 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle OAD$，显然，若不考虑相邻三角形要求，则有 $4^4=256$ 种涂法.

下面先对 S_1 和 S_3 涂色.

(1) S_1 和 S_3 同色，它们共有 4 种选择，对每一种选择，S_2 和 S_4 各有 3 种选择，所以此时共有 $4\times3\times3=36$ 种不同的涂法.



(2)S_1 和 S_3 不同色，它们共有 $C_4^2=12$ 种选择，对每一种选择，S_2 和 S_4 各有 2 种选择，所以此时共有 $12\times2\times2=48$ 种不同的涂法。

所以相邻三角形均不同色的四边形出现的概率为 $\frac{36+48}{256}=\frac{21}{64}$。

例 3 袋里装有 35 个球，每个球上都记有从 1 到 35 的一个号码，设号码为 n 的球重 $\left(\frac{n^2}{3}-5n+23\right)$ 克，这些球以同等的机会（不受其重量的影响）从袋里取出。若同时从袋中任意取出两球，则它们重量相等的概率是多少？

分析 先确定两个球重量相等的特征，之后便可求得此事件包含的结果总数。

解 设号码为 n，m 的两个球重量相等，则有 $\left(\frac{n^2}{3}-5n+23\right)=\left(\frac{m^2}{3}-5m+23\right)$，且 $n\neq m$，所以 $m+n=15$

解得 $(n,m)=(1,14),(2,13),(3,12),\cdots,(14,1)$，共有 14 种情况，所以取出两球，重量相等的概率为 $\frac{14}{A_{35}^2}=\frac{1}{85}$。

例 4 将 n 个人随机等可能地分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中去，试求下列事件的概率：$A=$｛指定的 n 间房中各有一人｝，$B=$｛恰有 n 间房，其中各有一人｝，$C=$｛某指定的房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个人｝。

分析 分别计算出事件 A、事件 B、事件 C 所包含的事件总数：对于事件 A，对于指定的 n 间房，第一人可分配到 n 间房的任意一间，有 n 种分法，第二人可分配到余下的 $n-1$ 间房中的任一间，有 $n-1$ 种分法，依此类推，得到 A 共有 $n!$ 种分法；对于事件 B，因为 n 间房没有指定，所以先在 N 间房中任意选出 n 间房，有 C_N^n 种选法，对于选出的这 n 间房，按照前面的分析，可知 B 有 $C_N^n n!$ 种分法；对于事件 C，由于 m 个人不是指定的，应先从 n 个人中任意选出，有 C_n^m 种选法，其余的 $n-m$ 个人可任意地分配到剩下的 $N-1$ 间房中，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种分配方法。

解 把 n 个人等可能地分配到 N 间房中去，由于没有限定每一个房间中的人数，故是一可重复的排列问题，这样的分法共有 N^n 种

对于事件 A，对于指定的 n 间房，第一人可分配到 n 间房的任意 1 间，有 n 种分法，第二人可分配到余下的 $n-1$ 间房中的任一间，有 $n-1$ 种分法，依此类推，得到 A 共有 $n!$ 种分法，故 $P(A)=\frac{n!}{N^n}$。

对于事件 B，因为 n 间房没有指定，所以先在 N 间房中任意选出 n 间房，有 C_N^n 种选法。对于选出的这 n 间房，按照前面的分析，可知 B 有 $C_N^n n!$ 种分法，从而 $P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$

对于事件 C，由于 m 个人不是指定的，应先从 n 个人中任意选出，有 C_n^m 种选法，其余



的 $n-m$ 个人可任意地分配到剩下的 $N-1$ 间房中，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种分配方法，故 C 中共含有 $C_n^m(N-1)^{n-m}$ 种情形，因此，$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\times\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$.

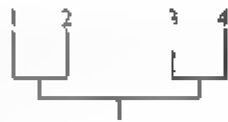
例 5 英国传说中的亚瑟王，手下有一批圆桌骑士。设骑士共有 2^n 名，让他们捉对厮杀，问甲与乙这对孪生骑士在比赛中相遇的概率是多少？（在我们的问题中，假定每次比赛都是一胜一负，没有打成平手或同归于尽的情况，并且由于选手的实力不明，我们假定每个人胜或负的概率为 $\frac{1}{2}$）

分析 先看几种简单的情况，猜想出结果，之后由特殊到一般用数学归纳法证明.

解 设 2^n 名骑士捉对厮杀时，甲与乙在比赛中相遇的概率为 p_n.

$n=1$ 时，$p_1=1$（只有 2 名选手，他们必然相遇）

$n=2$ 时，不妨设孪生兄弟中的甲排在 1 号位置，如图：



兄弟在第一轮相遇的概率为 $\frac{1}{3}$（乙在 3 个位置：2、3、4 号中占据 2 号），在第二轮相遇的概率为 $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}$（乙占据 2、3、4 号位置中的 3 或 4 号，并且兄弟 2 人在第一轮都获胜），因此相遇的概率为 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

同样，$n=3$ 时，相遇的概率为 $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{7}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$

因此，猜测一般的结果为 $\frac{1}{2^{n-1}}$.

我们用数学归纳法来证明：

假设命题对 $n-1$ 成立，考虑 n 的情况.

不妨设甲在 1 号位置，这时有 2 种情况

1. 乙也在上半区.

乙在上半区的概率为 $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$（占据 $2\sim2^n$ 号中的 $2\sim2^{n-1}$ 号），而由归纳法假设，在上半区的兄弟二人相遇的概率为 $\frac{1}{2^{n-2}}$.

2. 乙在下半区

乙在下半区的概率为 $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$，而兄弟相遇必须两人都进入决赛，即各赛 $n-1$ 场，概率为 $\frac{1}{2^{n-1}}$. 因此，所求概率为

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\times\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\times\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2=\frac{1}{2^n-1}\times\frac{1}{2^{n-1}}\times\left[2\times(2^{n-1}-1)+1\right]=\frac{1}{2^{n-1}}.$$



评注　面对较复杂的事件，认清问题实质，合理运用互斥事件的加法公式和相互独立事件的乘法公式，结合数学归纳法解决问题，是研究概率问题的有效手段．

例6　一位吸烟的数学家，左、右口袋里各放一盒火柴，每盒n根．每次用火柴时，随机地摸一个口袋取火柴，求：

(1)第一次摸到一盒空，而另一盒恰剩$r(r=0,1,\cdots,n)$根的概率；

(2)在第一次用完一盒火柴时，另一盒恰剩$r(r=1,2,\cdots,n)$根的概率．

这是波兰数学家巴舒赫(S. Banach，1892—1945)提出的问题．

分析　第一次摸到一盒空，而另一盒恰剩$r(r=0,1,\cdots,n)$根这个事件是如下两个互斥事件的和，一是先摸到左边的火柴盒空，而右边恰剩r根；一是先摸到右边的火柴盒空，而左边恰剩r根．而第一个事件又是如下两个相互独立事件的积，一个是取$n+(n-r)=2n-r$根火柴，其中n根取自左边，$n-r$根取自右边，另一个是第$2n-r+1$次取火柴是在左边取，故运用乘法和加法公式即可解决问题(1)，同理也可解决问题(2)．

解　(1)先设摸到左边的火柴盒空，在这事件发生之前，共取过$n+(n-r)=2n-r$根火柴，其中n根取自左边，$n-r$根取自右边，概率应为$C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$．

而第$2n-r+1$次取火柴是在左边取(但这次发现火柴盒已空)概率为$\frac{1}{2}$，所以摸到左边火柴盒已空，而右边还剩r根的概率为$C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\times\frac{1}{2}$．

同理，摸到右边火柴盒空而左边恰剩r根的概率也为$C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\times\frac{1}{2}$．

所以摸到一盒空，而另一盒恰剩r根的概率为$2\times C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\times\frac{1}{2}=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$．

(2)　与(1)类似，前$2n-r-1$根火柴有$n-1$根取自左(右)边，$n-r$根取自右(左)边，最后1根也取自左(右)边，概率为$2\cdot C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\times\frac{1}{2}=\frac{C_{2n-r-1}^{n-1}}{2^{2n-r-1}}$．

评注　对事件本身的分析很重要，认清事件的本质是解决问题的关键．

例7　甲、乙、丙三人约定采用游戏手枪互射比赛，方式是按甲、乙、丙的顺序轮流各射一枪(射击目标可自行选择)，周而复始，直至仅剩一人未被击中(被击中者当然立即倒下，不能再射击了)．

如果甲击中目标的概率为0.3，乙击中目标的概率为1(百发百中，从不失手)，丙击中目标的概率为0.5，问甲应采取什么策略，即他第一枪应打向哪里，最后获胜的概率最大？

分析　分三种情况讨论，分别求出甲获胜的概率，比较即可．

解　如果甲第一枪打丙，那么击中的概率为0.3，但在丙被一枪击中时，乙一枪即将



甲撂倒，所以甲击中丙还不如不击中. 在甲未击中丙时，乙应当先开枪打危险性更大的丙（丙的命中率 0.5 > 甲的命中率 0.3），在丙被乙击中后，有 0.3 的机会获胜（即最后剩下的人是甲）. 因而在甲第一枪打丙时，甲获胜的概率为 $(1-0.3)\times0.3=0.7\times0.3=0.21<0.3$.

如果甲第一枪打乙，那么击中的概率为 0.3. 在乙被击中时，丙、甲轮流互射，甲胜的机会为 $0.5\times0.3+0.5^2\times0.7\times0.3+0.5^3\times0.7^2\times0.3+\cdots=0.5\times0.3\times[1+0.5\times0.7+(0.5\times0.7)^2+\cdots]=0.5\times0.3\times\dfrac{1}{1-0.5\times0.7}=\dfrac{15}{65}=\dfrac{3}{13}$.

在乙未被击中时，乙先击中丙，然后甲、乙互射，甲获胜的机会为 0.3. 因此，甲第一枪打乙，获胜的概率为 $0.3\times\dfrac{3}{13}+(1-0.3)\times0.3$　　（*）

由于 $\dfrac{3}{13}<0.3$，所以（*）<0.3.

两种选择（打丙或打乙），甲胜的概率都小于 0.3.

其实，甲还有第三种选择，即他第一枪不打丙也不打乙，而是朝天放一空枪，然后乙打丙，甲再打乙，甲获胜的概率为 0.3.

因此，甲的最佳策略是第一枪应放空枪.

例 8　某公司需要录用一名秘书，共有 10 人报名. 公司经理决定按报名的顺序逐个面试，前三个人面试后一定不录用，自第四个人开始将他与前面的人比较，如果他的能力超过前面所有面试过的人，就录用他，否则就不录用，继续面试下一个. 如果前 9 个人都不录用，那么就录用最后一个面试的人.

假定这 10 个人的能力各不相同，可以按照能力由强到弱排成第 1，第 2，…，第 10. 以 A_k 表示能力第 k 的人能被录用的不同报名顺序的数目.

求证：(1) $A_1>A_2>\cdots>A_8=A_9=A_{10}$.

(2) 有超过 70% 的概率录用到能力最强的 3 个人之一，而只有不超过 10% 的概率录用到能力最弱的 3 个人之一.

分析　(1) 以 B_k 表示能力第 k 的人能被录用的不同报名顺序组成的集合，考虑由 B_k 到 B_{k-1} $(2\leqslant k\leqslant10)$ 构成的单射即可.

(2) 研究录用到能力最强的 3 个人之一时考虑前三位和第十个位置；研究录用到能力最弱的 3 个人之一时考虑 1，2，3.

解　(1) 能力第 k 的人记为 k，对于 $k(2\leqslant k\leqslant10)$ 被录用的一种排列，将 k 与 $k-1$ 对调，得到 $k-1$ 被录用的一种排列，所以 $A_{k-1}\geqslant A_k$. 在 $k\leqslant8$ 时，前 4 位为 $k+2, k+1, k, k-1$ 的排列是一个 $k-1$ 被录用的排列，但将 $k-1$ 与 k 对调，得到的不是 k 被录用的排列. 所以 $A_1>A_2>\cdots>A_8$. 又 8，9，10 只有在第 10 位才可能被录用，这时将 $k-1$ 与 k (k



$=9$ 或 10)对调，$k-1$ 被录用的排列变成 k 被录用的排列. 所以 $A_k=A_9=A_{10}$.

(2) 8,9,10 中有一个被录用时，他们中有一个在第 10 位，概率是 $\frac{3}{10}$，并且这时 1 必须在前 3 位，概率是 $\frac{3}{9}$. 因此录用能力最弱的 3 个人之一的概率 $<\frac{3}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{10}$.

1 在第 $k+1$ 位($3\leqslant k\leqslant 8$)的概率是 $\frac{1}{10}$，前 k 位中最小的数出现在前 3 位的概率为 $\frac{3}{k}$.

所以 1 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\left(\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{3}{7}+\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\right)=0.39869047\cdots$

2 在第 $k+1$ 位($3\leqslant k\leqslant 8$)的概率为 $\frac{1}{10}$，这时 1 在后 $9-k$ 位的概率为 $\frac{9-k}{9}$，2 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{9-k}{9}\times\frac{3}{k}$；2 在第 10 位的概率为 $\frac{1}{10}$，这时 1 在前 3 位的概率为 $\frac{3}{9}$，2 被录用的概率是 $\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}$. 所以 2 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}\times\left(\frac{6}{3}+\frac{5}{4}+\frac{4}{5}+\frac{3}{6}+\frac{2}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{1}\right)=0.19869047\cdots$

同样 3 在第 $k+1$ 位($3\leqslant k\leqslant 8$)的概率为 $\frac{1}{10}$，这时 1,2 在后 $9-k$ 位的概率为 $\frac{9-k}{9}\times\frac{8-k}{8}$，3 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{9-k}{9}\times\frac{8-k}{8}\times\frac{3}{k}$，3 在第 10 位的概率为 $\frac{1}{10}$，这时 1 在前 3 位的概率为 $\frac{3}{9}$，3 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}$，所以 3 被录用的概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}\times\left(\frac{6\times5}{8\times3}+\frac{5\times4}{8\times4}+\frac{4\times3}{8\times5}+\frac{3\times2}{8\times6}+\frac{2\times1}{8\times7}+1\right)=0.11119047\cdots$

因此录用能力最强的 3 个人(1,2,3)的概率是以上 3 个概率之和 $0.39869047\cdots+0.19869047\cdots+0.11119047\cdots=0.7085\cdots>70\%$.

因此 $\frac{A_k}{10!}$ 就是 k 被录用的概率.

例 9 某电器商经过多年的经验发现本店每个月售出的电冰箱的台数是一个随机变量，它的分布如下表

ξ	1	2	3	…	12
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	…	$\frac{1}{12}$

设每售出一台电冰箱电器商获利 300 元. 如销售不出而囤积于仓库，则每台每月需花费保养费 100 元. 问电器商月初购进多少台电冰箱才能使自己月平均收益最大？

分析 将电器商每月的收益表示成为月初购进台数的函数，求出其数学期望即可



解 设月初电器商购进的冰箱台数为 $y(1\leqslant y\leqslant 12)$，电器商每月的收益为 η 元，则 η 是随机变量 ξ 的函数且 $\eta=\begin{cases}300y, & \xi\geqslant y\\ 300y-100(y-\xi), & \xi<y\end{cases}$

因此电器商平均每月的收益就是 η 的数学期望，$E\eta=300y(P_y+P_{y+1}+\cdots+P_{12})+[300-100(y-1)]P_1+[2\times 300-100(y-2)]P_2+\cdots+[300(y-1)-100]P_{y-1}$

$=300y(12-y+1)\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\left[300\cdot\frac{y(y-1)}{2}-100\cdot\frac{y(y-1)}{2}\right]=\frac{25}{3}(-2y^2+38y)$，故当 $y=9.5$ 时，也就是电器商月初购进9台或10台电冰箱时，收益最大.

例 10 甲与乙比赛 n 次，并将胜负的次数累计下来，如果每一次比赛各有50%的获胜机会，求甲胜的次数始终超过乙的概率.

分析 考虑双方胜的次数至少有一次相等的概率.

解 如果甲胜的次数超过乙的次数，那么在整个比赛进程中，不会出现双方胜的次数相等的情况.

反过来，如果双方胜的次数总不相等，那么由于甲、乙势均力敌，甲压倒乙的概率应当等于乙压倒甲的概率，各占双方胜的次数总不相等的概率的一半.

而双方胜的次数总不相等的概率又等于1减去双方胜的次数至少有一次相等的概率. 因此，只要求出双方胜的次数至少有一次相等的概率.

甲共胜 x 次的概率为 $\frac{C_n^x}{2^n}$（n 次比赛，胜负的情况有 2^n 种，甲胜 x 次有 C_n^x 种）.

于是出现双方胜的次数相等的概率为

$$\sum_{x<\frac{n}{2}}\frac{2x}{n}\cdot\frac{C_n^x}{2^n}+\sum_{x>\frac{n}{2}}\frac{2(n-x)}{n}\cdot\frac{C_n^x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum_{x<\frac{n}{2}}C_{n-1}^{x-1}+\sum_{x>\frac{n}{2}}C_{n-1}^{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum_{x<\frac{n}{2}}C_{n-1}^{x-1}+\sum_{x>\frac{n}{2}}C_{n-1}^{n-x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum_{x=0}^{n-1}C_{n-1}^{x}-C_{n-1}^{\frac{n}{2}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(2^{n-1}-C_{n-1}^{\frac{n}{2}-1}\right)$$

$$=1-\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

从而，不出现双方胜次（胜的次数）相等的概率为 $\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}$



甲胜的次数始终超过乙的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}=\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n+1}}$.



思考交流

一次掷10颗骰子，已知至少出现一个一点，问至少出现两个一点的概率是多少？

解　设$A=\{$至少出现一个一点$\}$，$B=\{$至少出现两个一点$\}$，则所求概率为$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}$. 因为$\overline{B}=\{$至多出现一个一点$\}$，故$\overline{B}A=\{$恰好出现一个一点$\}$，于是$P(\overline{B}|A)=\frac{10\times5^{9}}{6^{10}}\approx0.3230$，且$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5^{10}}{6^{10}}\approx0.8385$，所以$P(B|A)=1-\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}\approx1-\frac{0.3230}{0.8385}=0.6148$.



同步检测

一、选择题

1. 一袋子中有蓝、绿两色球，其中有6个蓝球，如果从袋子中任取一球，是蓝球的概率是$\frac{1}{4}$，那么袋子中绿球的个数为（　　）

A. 12　　B. 18　　C. 24　　D. 30

2. 在12面骰子上，数字1,2,3,4各标两面，数字5,6,7,8各标一面，观察发现，骰子的12面各面出现的概率是相同的，这个12面骰子两次落下的结果的总和是6的概率是（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{5}{114}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{12}$

3. 三匹马x,y,z参加一场无平局的比赛，如果x的输赢之比为$3:1$，y的输赢之比为$2:3$，那么z的输赢之比为（　　）（注：H的输赢之比为$\frac{p}{q}$是指H赢的概率为$\frac{q}{p+q}$）

A. $14:3$　　B. $13:4$　　C. $17:3$　　D. $17:4$

4. 在盒子中有十个相同的球，分别标有号码1,2,…,10，从中任取一球，则此球的号码为偶数的概率为（　　）



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

二、填空题

5. 某人有5把钥匙，其中有一把可打开房门，但忘记了开房门的是哪一把，于是他逐个不重复地试开，则恰好第三次打开房门的概率是________.

6. 从0，1，2，…，9这10个数中取3个数，则其和为不小于10的偶数的概率为________.

7. 从10^{99}的正因子中随机地选取一个，它恰为10^{88}的整数倍的概率是既约分数$\frac{m}{n}$，则$m+n=$________.

8. 口袋中有5个球，编号为1，2，3，4，5，从中任取3球，以ξ表示取出的球的最大号码，则$E\xi=$________.

9. 抽屉里有红、蓝两种颜色的袜子，最多1991只，若当不放回的任取两只则它们同色的概率为$\frac{1}{2}$，则这种情况下抽屉里最多有________只红袜子.

10. 投掷一枚硬币，每次正面出现得1分，反面出现得2分，则恰好得n分的概率为________.

11. 某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占总产量的15%，20%，30%，35%，又这四条流水线的不合格品率依次为0.05，0.04，0.03，0.02，现从出厂产品中任取一件，恰好抽到不合格品的概率是________.

12. 某一部机器在一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周5个工作日里均无故障，可获利润10万元，发生一次故障可获利5万元，只发生两次故障可获利0万元，发生三次或三次以上故障就要亏损2万元，则一周内期望利润是________.

三、解答题

13. 某人写了3封信，有3个信封，然后把3封信随意地套入3个信封，问至少有一封信碰对了地址的概率是多少？

14. 在一个给定正$(2n+1)$边形的顶点中随机地选取三个不同的顶点，如果任何一种取法的可能性是相等的，求这个正多边形的中心位于随机所取三点构成的三角形内部的概率.

15. 某售货员负责在甲、乙、丙三个柜面上售货，若在某一小时内各柜面不需要售货员照顾的概率分别为0.9，0.8，0.7，假设各个柜面是否需要照顾互相之间没有影响，求在这个小时内：(1)只有两柜面需要售货员照顾的概率；(2)三个柜面最多有一个需要售货员照顾的概率；(3)三个柜面至少有一个需要售货员照顾的概率.



16 有人掷硬币走跳跳棋的游戏，已知硬币出现正反面的概率都是$\frac{1}{2}$，棋盘上标有第0站，第1站，…，第100站．一枚棋子开始在第0站，棋手每掷一次硬币棋子向前跳动一次，若掷出正面，棋向前跳一站（从R到$R+1$）；若掷出反面，棋子向前跳两站（从R到$R+2$），直到棋子跳到第99站（胜利大本营）或跳到第100站（失败集中营）时，该游戏结束．设棋子跳到第n站的概率为P_n．

(1)求P_0，P_1，P_2的值；

(2)求证：$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$，其中$n\in\mathbf{N}$，$2\leqslant n\leqslant 99$；

(3)求P_{99}及P_{100}的值．

17．据统计，一年中一个家庭万元以上的财产被盗的概率为0.01，保险公司开办一年期万元以上家庭财产保险，参加者需交保险费100元，若在一年内，万元以上财产被盗，保险公司赔偿$a(a>100)$元，问a如何确定，可使保险公司获益？

18．一项“过关游戏”规则规定：在第n关要抛掷一颗骰子n次，如果这n次抛掷所出现的点数之和大于2^n，则算过关．问：

(1)某人在这场游戏中最多能过几关？

(2)他连过前三关的概率有多少？

（注：骰子是一个在各面上分别有1，2，3，4，5，6点数的均匀正方体，抛掷骰子落地静止后，向上一面的点数为出现点数）

19．将编号为1，2，…，9的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上，每个等分点上各有一个小球．设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为s，求使s达到最小值的放法概率．（注：如果某种放法，经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合，则认为是相同的放法）

20．剧院售票窗口前$2n$个人排队买票，每张票5元，每人买一张票，其中n个人只有一张拾元，n个人只有一张伍元．开始售票时，售票窗口无钱可找，求$2n$个人都能顺利买票，不会因售票员无钱可找而等候的概率是多少？



参考答案

一、几个基本原理

1. B　若后三位中还有一个1，这样的数有$C_3^1A_9^2=216$个，若后三位中不含1，则可从0，2，3，4，5，6，7，8，9这九个数中任取两个，有$C_9^2=36$种取法；之后从中取出一个作为百位、十位或个位上的数字，有$C_3^1C_2^1=6$种方法；最后把剩余的一个数填入另外两个空位，故有$36\times6=216$个，故共有$216+216=432$个满足条件的数。

2. D　7位号码可有10^7个，6位号码可有10^6个，故采用7位号码比采用6位号码多装的电话门数为10^7-10^6。

3. D　设这2007个点分别为：A_1，A_2，…，A_{2007}，它们从左到右依次分布在一条数轴上，这些点从左到右对应的实数分别为：a_1，a_2，…，a_{2007}，由于$a_1+a_i\neq a_1+a_j$（$1<i<j\leqslant2007$），故，线段A_1A_2，A_1A_3，…，A_1A_{2007}的中点两两不同，共计有2006个；同理，线段A_2A_{2007}，A_3A_{2007}，…，$A_{2006}A_{2007}$的中点两两不同，共计有2005个。若这两组中点中有重合的，设A_1A_i和A_jA_{2007}（$2\leqslant i\leqslant2007$，$2\leqslant j\leqslant2006$）的中点重合，则有$a_1+a_i=a_j+a_{2007}$，从而有，$a_{2007}-a_i=a_1-a_j$，而$a_1<a_j$，所以，$a_1-a_j<0$，且$a_{2007}\geqslant a_i$，故$a_{2007}-a_i\geqslant0>a_1-a_j$，矛盾。从而，互不重合的中点至少有4011个。

4. 4009　设三角形内有n个点时，可以组成三角形的个数为a_n，则$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$，故$a_n=3+2(n-1)=2n+1$，所以，$a_{2004}=4009$。

5. 43条　设倾斜角为θ，则$\tan\theta=-\dfrac{a}{b}>0$，不妨设$a>0$，$b<0$。(1)$c=0$时$a$有3种取法，$b$有3种取法，排除2个重复（$3x-3y=0$，$2x-2y=0$和$x-y=0$为同一条直线），故这样的直线有$3\times3-2=7$条；(2)$c\neq0$时，$a$有3种取法，$b$有3种取法，$c$有4种取法，且其中任意两条直线均不相同，故这样的直线有$3\times3\times4=36$条，从而符合要求的直线共有$7+36=43$条

6.　**解**　若千位数字为4或6，这时千位数字有2种选法，个位数字有4种选法，百位



数字有8种选法,十位数字有7种选法,所以共有$2\times4\times8\times7=448$个数符合要求。同理,若千位数字为5,有$1\times5\times8\times7=280$个偶数符合要求

所以共有$448+280=728$个

7. 解:从左到右151个互相平行两两距离为1的平面与对角线有151个交点,将对角线分为150段。同样,从上到下、从前到后的两两距离为1的平面又增加一些分点,除去对角线的一端外,共有$150+324+375-(150,324)-(150,375)-(324,375)+(150,324,375)=768$个分点,将对角线分为768段,每段属于一个单位立方体,即对角线穿过768个单位立方体。

8. 解:设P_1、P_2、P_3、P_4、P_5为所给的点,两两连线共有$C_5^2=10$条,四个点间的两两连线是$C_4^2=6$,可见从1个点可引6条垂线,5个点共引了30条垂线,它们最多有$S=C_{30}^2=435$个交点

但P_1P_2的三垂线平行,无公共点,故应从S中减去$C_5^2C_3^2$个。

又从任一点可引6条垂线,因此应从S中减去$5C_6^2$个。

再因每三点构成一个三角形,这个三角形三条高共点,应从中减去$C_5^3(C_3^2-1)$个

所以交点最多有$C_{30}^2-C_5^2C_3^2-5C_6^2-C_5^3(C_3^2-1)=310$个。

9. 解:设恰好有一个奇数的有x组,全都不是奇数的有y组,则$\begin{cases}600+500+x+y=2007\\3\times600+2\times500+x=3\times1004\end{cases}$解得,$\begin{cases}x=212\\y=695\end{cases}$,故恰好有一个奇数的有212组,全部不是奇数的有695组。

10. 解:前三位数是123的五位"渐升数"共有$5+4+3+2+1=15$个数。同理,前三位数是124、125、126、127的五位"渐升数"分别有10个、6个、3个、1个,前2位数是12的五位"渐升数"共有35个。

类似的可得前两位数是13、14、15、16的五位"渐升数"分别共有20个、10个、4个、1个。

从而,首位数是1的五位"渐升数"共有$35+20+10+4+1=70$个。同理,前2位数是23的五位"渐升数"共有$10+6+3+1=20$个。

前2位数是24的五位"渐升数"共有$6+3+1=10$个。所以,第100个"渐升数"是24789

11. 解:20以内的质数共有8个:2、3、5、7、11、13、17、19,每个质数或出现于分子,或出现于分母,但不同时出现于两处,因此,可构成2^8个既约分数$\frac{p}{q}$满足$pq=20!$,又因为在$\frac{p}{q}$与$\frac{q}{p}$中恰好有一个在区间(0,1)内,故符合题意的分数有$2^7=128$个

12. 解:(1)$\overline{abcd}$中恰好有2个不同的数字时,能组成$C_4^2=6$个不同的数字;(2)$\overline{abcd}$



中恰好有 3 个不同的数字时，能组成 $C_3^1C_3^1C_2^1+C_2^1C_2^1=12+4=16$ 个不同的数字；(3) $\overline{abcd}$ 中恰好有 4 个不同的数字时，能组成 $P_3^3=6$ 个不同的数字。所以，符合条件的数字共有 $6+16+6=28$ 个

13. 解：首先，在每个侧面上除点 P 外尚有 5 个点，其中任意三点组添加 P 后组成的四点组都在同一个平面，这样的三点组共有 C_5^3 个，3 个侧面共有 $3C_5^3$ 个；其次，含 P 的每条棱上的 3 点组添加底面与它异面的那条棱上的中点组成的四点组也在一个平面上，这样的四点组有 3 个，综上，共有 $3C_5^3+3=33$ 个。



14. 解：由相邻的两块土地不都种甲种蔬菜，可知六块土地上种甲种蔬菜的块数是 0，1，2，3 四种可能，对于每一种可能情况，先在 $(6-n)$ 块土地上种上乙种蔬菜，再将 n 块甲种蔬菜插入到 $(6-n)$ 块乙种蔬菜的两端及中间去，可得到种 n 种甲种蔬菜的方案数为 C_{7-n}^n，依次取 $n=0,1,2,3$ 可得总方案数为 $C_7^0+C_6^1+C_5^2+C_4^3=21$。

15. 解：设 b_i 的原象个数为 x_i $(i=1,2,3,4)$，则每一个满足条件的映射与方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 的每一组正整数解形成一一对应关系，而方程的正整数解的个数为 $C_9^3=84$，故共有满足条件的映射有 84 个

16. 解：$(a+b+c+d)^n$ 展开合并同类项后的每一项是形如 $ma^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$ 的代数式，其中 m 是常数，因此我们要求出满足条件 $x_1+x_2+x_3+x_4=30(x_1,x_2,x_3,x_4\in \mathbf{N})$ 的数组的个数，也就是方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 的非负整数解的个数，而方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 可化为 $(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)+(x_4+1)=34$，令 $x_i+1=y_i(i=1,2,3,4)$，则方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 的每一组非负整数解都对应着方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=34$ 的一组正整数解，反之，方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=34$ 的每一组正整数解都对应着方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 的一组非负整数解，而方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=34$ 的正整数解有 C_{33}^3 个，所以，将 $(a+b+c+d)^{30}$ 展开合并同类项后，共有 C_{33}^3 项。

17. 解：考虑从排成一排的 14 个小球中取出三个球，且要求它们每两个之间至少相隔两个小球，每一种取法都对应着一个满足题意的取数方法，反之每一个满足题意的取数方法都对应着一个取球的方法。下面我们来求有多少种取球方法。先取出 4 个球，再从剩余的 10 个球中任取 3 个，然后再在取出的 3 个球中按顺序，每两个之间插入两个小球，因此，满足题意的取法数共有 $C_{10}^3=120$ 种。

18. 解：先将"一步迈两级台阶"这一动作记为 a，因为楼梯共有 12 级台阶，故动作 a 至多只能做 6 次，再记"一步迈一级台阶"的动作记为 b，则上楼的整个过程由 k 个 a 及 $12-2k$ 个 b 组成，这里的 k 可取 0，1，2，3，4，5，6。对于某个 $k(k=0,1,2,3,4,5,6)$，其全排列数为 $\frac{[k+(12-2k)]!}{k!\cdot(12-2k)!}=\frac{(12-k)!}{k!\cdot(12-2k)!}$，因此，上楼的方法共有：$\sum_{k=0}^{6}\frac{(12-k)!}{k!\cdot(12-2k)!}$



233 种

19. 解：当 $x=0$ 时，方程化为 $x_2+x_3+\cdots+x_{9}=3$，它共有 C_{11}^{8} 组解，当 $x=1$ 时，有 C_9^8 组解；当 $x\geq 2$ 时，方程无解，故共有 $C_{11}^{8}+C_9^8=174$ 组解.

20. 解：只需证明具有性质 P 的排列数 m 大于全部排列数的一半，设 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 中，k 与 $k+n$ 相邻的所有排列的集合为 A_k，则 $M\geq\sum\limits_{k=1}^{n}|A_k|-\sum\limits_{1\leq k_1<k_2\leq n}|A_{k_1}\cap A_{k_2}|=$

$2n(2n-1)!-C_n^2 4(2n-2)!>\frac{1}{2}(2n)!$

证毕.

二、排列组合

1. D　把10个人平均分成两组的方法数为 $\frac{1}{2}C_{10}^5$，再从每组中选出正副组长各1人，不同的选法个数为 P_5^2，则不同的选法个数为 $\frac{1}{2}C_{10}^5(P_5^2)^2$

2. D　每一种排法对应着从7个不同元素中取出3个元素的一个组合，反之，每一种从7个不同元素中取出3个元素的一个组合对应着一种符合题意的排法，故共有 $C_7^3=\frac{7!}{4!\cdot 3!}$ 种排法

3. D　把10个儿童平均分成两组的分法数为 $\frac{1}{2}C_{10}^5C_5^5$，每组5人进行圆圈排列分别有4! 种排法，故围法总数为 $\frac{1}{2}C_{10}^5C_5^5 4!\cdot 4!$.

4. B　把父母与最小的孩子看作一个整体，再与其余的3个孩子共计4人进行圆排列，有3! 种排法，再把父母进行排列，有2! 种排法，故共有 $2!\cdot 3!$ 种排法.

5. B　对于每一种重量，或含重1g的砝码或不含，共计有两种可能，同理，对于其他规格的砝码也都如此，故可组成 2^5 种重量，由于重量非零，且这 2^5 种重量彼此无重复的，故共可组成不同的重量种数为 2^5-1.

6. D　(1)不含伍分人民币时，可组成的不同币值(非零)有 $4\times10-1=39$ 种；(2)含一枚伍分人民币时，可组成的不同币值有 $4\times10=40$ 种；(3)含二枚伍分人民币时，可组成的不同币值有 $4\times10=40$ 种，但这40种币值中与情形(1)重复的有30种，故共可组成的不同币值(非零)有 $39+40+40-30=89$ 种.

7. 150　此问题相当于将 A、B、C、D、E 这5张卡片用3种颜色去涂，每种颜色必有，共有多少种涂法?

先将5张卡片分成三组，有 $C_5^3+\frac{1}{2}C_5^2C_3^2$ 种分法，之后将分出的三组用三种颜色去



涂，有 A_3^3 种涂法，故有$(C_5^2+\frac{1}{2}C_5^2C_3^2)A_3^3=(10+15)\cdot 6=150$ 种不同的选取方法

8. 7776　第1个弹子孔有6种配置方法，第2个弹子孔有6种配置方法，…，第5个弹子孔有6种配置方法，故最多能配置 $6^5=7776$ 种不同的锁头

9. 8，128　正面向上的情形共有8种：正面向上数是0个，1个，2个，3个，4个，5个，6个，7个，故可以组成8种不同的结果；如果是可以辨认的，又可以组成 $2^7=128$ 种不同的结果.

10. 5^{15}，$\frac{15!}{(3!)^5}$　第 i 个样本有5种取法($i=1,2,3,4,\cdots,15$)，故有 5^{15} 种不同的抽取方法；如果抽取的样本中每类记号恰有3个，这相当于15个元素的每类元素均有3个重复元素的排列，故有 $\frac{15!}{(3!)^5}$ 种不同的抽取方法.

11. 8!　先把除甲、乙外的8个人平均分成两组，有 $\frac{1}{2}C_8^4$ 种分法，取出其中一组4人放在甲、乙中间，把这6个人看作一个整体与其余的4人进行圆排列，有4!种排法，夹在甲、乙两人之间的4人有4!种排法，甲、乙两人有2种排法，故共有 $\frac{1}{2}C_8^4\times 4!\times 4!\times 2=8!$ 种排法.

12. 解：设这6个不同的钱包所装的硬币数分别为：x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12$，若 $x_i\neq 0(i=1,2,3,4,5,6)$，有 $C_{11}^5=462$ 种装法；若 $x_i=0(i=1,2,3,4,5,6)$，有 $C_{11}^4=330$ 种装法，故共有 $462+6\times 330=2442$ 种装法

13. 解：(1)先将甲、乙两个人捆在一起，将它与其余的 $n-2$ 个人进行圆排列，共有 $(n-2)!$ 种排法，再将甲、乙两人排列，故共有 $2\cdot(n-2)!$ 种排法.

(2)先从除甲、乙两人以外的 $n-2$ 个人中取出一人，有 $C_{n-2}^1=n-2$ 种取法，将它塞到甲、乙两个人之间捆在一起，将该整体与其余的 $n-3$ 个人进行圆排列，共有 $(n-3)!$ 种排法，再将甲、乙两人排列，故共有 $(n-2)\cdot(n-3)!\cdot 2=2\cdot(n-2)!$ 种排法

(3)先从除甲、乙两人以外的 $n-2$ 个人中取出两个人，有 $C_{n-2}^2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 种取法，将它塞到甲、乙两个人之间捆在一起，将该整体与其余的 $n-4$ 个人进行圆排列，共有 $(n-4)!$ 种排法，再将甲、乙两人和塞进去的两个人分别进行排列，故共有 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot(n-4)!\cdot 2\cdot 2=2\cdot(n-2)!$ 种排法.

14. 解：设朋友最多的人 A 有 k 个朋友 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，并记 $S=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$，显然，有 $k\geqslant m$．若 $k>m$，设 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}$ 是 S 的任一个 $m-1$ 元子集，则 $A,B_{i_1},\cdots,B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有一个公共朋友，记为 C_i．因为 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i\in S$，定义



映射 $f:\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\to C_i\in S$，则 f 是从 S 的所有 $m-1$ 元子集的集合到 S 的一个单射. 事实上，若有 S 的两个不同的 $m-1$ 元子集 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}$ 和 $\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$，二者有相同的象 C_i，则因 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\cup\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$ 中至少有 m 个元素，故这 m 个人有两个公共朋友 A 和 C_i，与已知矛盾.

由于 f 是单射，故 $C_k^{m-1}\leqslant k$. 因为 $m\geqslant 3$，$m-1\geqslant 2$，所以 $C_k^{m-1}\geqslant C_k^2>C_k^1=k$，矛盾. 可见，所求最大值为 m.

15. 解：(1) $a+b\equiv 0\pmod{17}$，即 $a\equiv k\pmod{17}$ 且 $b\equiv 17-k\pmod{17}$，($k=0,1,2,\cdots,16$). 将 $1,2,\cdots,366$ 按模 17 可分 17 类 $[0],[1],\cdots,[16]$. 因 $366=17\times 21+9$，故 $|[1]|=|[2]|=\cdots=|[9]|=22$，$|[10]|=|[11]|=\cdots=|[16]|=|[0]|=21$. 欲满足 $17\mid a+b$，当且仅当 $a,b\in[0]$ 或 $a\in[k]$，$b\in[17-k]$.

当 $a,b\in[0]$ 时，具有性质 p 的二元子集的个数为 C_{21}^2 个.

当 $a\in[k]$，$b\in[17-k]$，($k=1,2,\cdots,7$) 时，具有性质 p 的二元子集有 $7C_{22}^1C_{21}^1$ 个.

当 $a\in[8]$ 时，具有性质 p 的二元子集有 $C_{22}^1C_{22}^1$ 个.

所以 A 的具有性质 p 的二元子集的总个数为 $C_{21}^2+7C_{22}^1C_{21}^1+C_{22}^1C_{22}^1=3298$ 个.

(注：如果把子集换成数对 (a,b)，共有 2×3298 个)

(2) 为使二元子集两两不相交，可作如下搭配

$a\in[0]$，$b\in[0]$，共有 10 个子集.

$a\in[k]$，$b\in[17-k]$，($k=1,2,\cdots,7$) 时，有 21 个子集.

$a\in[8]$，$b\in[9]$，有 22 个子集.

故 A 的具有 p 的两两不相交的二元子集共有 $10+7\times 21+22=179$ 个.

16. 解：设甲的家为坐标原点，建立直角坐标系，则问题转化为求 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的最短路径数. 这里所谓最短路径是指不允许向后退的路径，即不允许逆 x，y 的方向走.

设从 $(0,0)$ 点开始向水平方向前进一步为 x，垂直方向上升一步为 y，于是从 $(0,0)$ 到 (m,n) 点，水平方向要走 m 步，垂直方向要走 n 步，总和为 $m+n$ 步. 于是一条到达 (m,n) 点的路径对应一个由 m 个 x，n 个 y 组成的一个排列. 反过来，由 m 个 x、n 个 y 的任一排列对应一条从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的路径. 所以从 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的路径与 m 个 x，n 个 y 的排列一一对应. 故所求的路径数为 C_{m+n}^m.

上述路径与排列的对应也可以换一种说法. 每前进一步 x，在坐标平面上作一个向上的格坡（单位方格的对角线）. 每前进一步 y，则在坐标平面上相继作一个向下的格坡. 这样一来，从 $(0,0)$ 到 (m,n) 点的一条路径就一一对应一条从 $O(0,0)$ 到点 $A(m+n,m-n)$ 的折线. 其中每条折线有 m 个上坡，n 个下坡，故这样的折线的条数为 C_{m+n}^m.

17. 解：记 $A_{n+1}=A_1$ 我们来建立一个格点坐标平面用以描述质点的运动状况. 其中



x 坐标对应于已走的步数，y 坐标对应于相应的顶点．这样，一种满足题意的走法便惟一对应于一条以$(0,0)$到(k,m)(或$(k,m-n)$)的折线，且除(k,m)(或$(k,m-n)$)外，折线与 $y=m$ 及 $y=m-n$ 无交点．

我们先来考虑满足此条件且终点为(k,m)的折线条数．

显然，满足条件的折线必过$(k-1,m-1)$．以下讨论中，以惯例规定若 $m>n$，$m<0$ 或 m 不为整数，则 $C_n^m=0$．

从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2)}$．

由定理 3 知，从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$且与直线 $y=m$ 相交的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-m-2)}$．

从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$且与直线 $y=m-n$ 相交的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2n)}$．

由两次反射原理可知：

从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$且先与 $y=m$ 相交，再与 $y=m-n$ 相交的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(2n+m+k-2)}$．

而由两次反射原理可知：

从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$且先与 $y=m-n$ 相交，再与 $y=m$ 相交的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-m-2n)}$．

因此，从$(0,0)$到$(k-1,m-1)$的满足题意的折线数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-m-2)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(2n+m+k-2)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(m+k-2n-2)}$．

类似地，我们有从$(0,0)$到$(k,m-n)$的满足题意的折线条数为 $C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-n)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+n-m)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-n-m)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(m+k-3n)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(m+k+n)}$．

故所求的方法数为

$$C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-m-2)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2n)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-2n-2)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+m-n)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k+n-m)}-C_{k-1}^{\frac{1}{2}(k-n-m)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(m+k-3n)}+C_{k-1}^{\frac{1}{2}(m+k+n)}.$$

18. 证明　设 A 是符合题意的元素个数最多的集合，$|A|=x$，则对于每一个元素 $a\in X-A$，$A\cup\{a\}$ 中必含 S 中的一个元素(否则与假设矛盾)．设 $a\neq b$，$a,b\in X-A$，则 $A\cup\{a\}$，$A\cup\{b\}$ 包含了 S 中的两不同元素，并且与之对应的 A 中二元子集也不相同，否则，与 S 中的二元子集至多有一个公共元及 $A\not\supset S$ 相矛盾．因此，$B=\{a\mid a\in X-A\}$ 中元素单值对应于 A 的二元子集，从而，$C_x^2\geq n-x$．又 $x\in\mathbf{N}$，所以 $x\geq[\sqrt{2n}]$．

19. 解　从 5 个白球，3 个红球，2 个黑球中任取 r 个的不同取法数 U_r 的母函数为 $U(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)$，则 x^5 的系数 $1+2+3+3+2+1=12$ 即为所求 U_5，故共有 12 种不同的取法．

20. 解　先将女性排定，有 4! 种方法．女性与女性之间若坐男性(包括这些女性的丈



夫)必不少于两个.同样,在男性与男性之间坐着的女性也必不少于两个.把座位连在一起的女性视为1组,则4位女性的分组有4,3+1,2+2,2+1+1,1+1+1+1这5种.孤立坐着的女性必须在这一排座位的两端.所以1+1+1+1的分组方式不合要求.女性分成2+1+1时,两端必须坐着女性,这时男性只能分成2+2,即:女男男女女男男女,男性的排法只有1种.女性分成2+2时,有4类:女女男男男男女女,女女男男男女女男,男女女男男男女女,女女男男女女男男,或男男女女男男女女,男女女男男女女男,男性的排法分别有2,1,1,1种.女性分成3+1时,有3类:女女女男男男男女或女男男男男女女女,男男女女女男男女或女男男女女女男男,男女女女男男男女或女男男男女女女男,男性的排法分别有2,1,1种.女性4人连排时,有3类:女女女女男男男男或男男男男女女女女,男男男女女女女男或男女女女女男男男,男男女女女女男男,男性的排法分别有3!,2!,2!种.于是排法总数为4!(1+2+2×1+2×1+1+2×2+2×1+2×1+2×3!+2×2!+2!)=24×34=816.

三、重集的排列与组合

1. 99!−2×98!=97×98!

2. C_{25}^{7};C_{25}^{1}.

3. 先把10个男生排成圆形,有9!种方法.固定一个男生的排法,把5位女生插在10个男生之间,每两个男生之间只能插一个女生,而且5个女生之间还存在着排序问题,故有P_{10}^{5}种排法.由乘法原则,共有9!×P_{10}^{5}种坐法.

4. $C_{100}^{2}-C_{50}^{1}C_{50}^{1}=2450$种

5. 五位数共有90000个,其中能被3整除的有90000÷3=30000个.能被3整除且不出现6的5位数有8×9×9×9×9÷3=17496个.因此满足题意要求的数有30000−17496=12504个.

6. 第一个人可从6个入口中的任一个进站;第2个人也可选择6个入口中的任一个进站,但当他选择与第1人相同的入口进站时,有在第1人前面还是后面两种方式,所以第2人有7种进站方式.同理,第3人有8种进站方案,…,由乘法原则,总的进站方案数为6×7×…×14=726485760

7. $P(15;6,5,4)C_{10}^{3}$

8. 引入变量$y_1=x_1-3$,$y_2=x_2-1$,$y_3=x_3$,$y_4=x_4-5$,此时方程变为$y_1+y_2+y_3+y_4=11$.新方程的非负整数解的个数是$C(11+4-1,11)=C(14,11)=364$.

9. 2^{n-1}

10. 相当于将2n个不同的球放到n个不同的盒中,每盒两个球,共有$\frac{(2n)!}{2!\cdot 2!\cdot\cdots\cdot 2!}$种方法.

11. 设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,令$b_1=a_1$,$b_2=a_2-1$,$b_3=a_3-2$,$b_4=a_4-3$,$b_5=a_5-4$,



则 $b_1<b_2<b_3<b_4<b_5$ 与{1,2,…,20}的5组合一一对应.

12. 112

13. 略

四、二项式定理

1. A

$\because T_{4+1}=C_6^4(x\sqrt{x})^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4=\frac{15}{2},x=2,$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n})=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n})=1.$

2. A

$\left(1+x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}=\sum\limits_{r=0}^{10}C_{10}^r\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^r$

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^r=C_r^t x^{r-t}\left(\frac{1}{x}\right)^{2t}=C_r^t x^{r-3t}$

$\therefore \begin{cases}r=0\\t=0\end{cases},\begin{cases}r=3\\t=1\end{cases},\begin{cases}r=6\\t=2\end{cases},\begin{cases}r=9\\t=3\end{cases}$

$C_{10}^0+C_3^1C_{10}^3+C_{10}^6C_6^2+C_{10}^9C_9^3=4351.$

3. A　原式 $=(x-1)(x+2)^9$, x^6 的系数为 $C_9^3 2^3-C_9^4 2^4=2016.$

4. B　由等比数列求和公式,有

$x(1+x)^n+x(1+x)^{n+1}+\cdots+x(1+x)^{2n}=\frac{x(1+x)^n[(1+x)^{n+1}-1]}{(1+x)-1}=(1+x)^{2n+1}$

$-(1+x)^n$,比较 x^n 的系数,得

$C_n^{n-1}+C_{n+1}^{n-1}+\cdots+C_{2n}^{n-1}=C_{2n+1}^{n}-1,$

即 $C_n^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{2n}^{n+1}=C_{2n+1}^{n}-1$,这表明,A、C相等,又将C展开得D,故只有B是错误的.

5. B

由组合恒等式 $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ 得,原式 $=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

6. C　由二项式定理得,

$C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots=\frac{1}{2}[(1+i)^n+(1-i)^n]=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$

$n=4m$, $2^{2m}\cos m\pi=(-1)^m2^{2m}$, $C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots=(-1)^m2^{2m}$

7. A

当 $a=b$ 时,$f_n=g_n$. 当 $a\neq b$ 时,令 $a=x+y,b=x-y(x,y\in\mathbf{R}^+)\Rightarrow x=\frac{1}{2}(a+b)>0$,这时 $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)(a-b)}=\frac{1}{2y(n+1)}[(x+y)^{n+1}-(x-y)^{n+1}]=\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1x^n+C_{n+1}^3x^{n-2}y^2+$



$\cdots)\geqslant\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{1}x^{n}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n}$，即 $f_n\geqslant g_n$.

8. D

解：$(15+\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{19}=2(15^{19}+C_{19}^{2}15^{17}\cdot 220+\cdots+C_{19}^{18}15\cdot 220^{9})$

$=10(15^{18}\cdot 3+C_{19}^{2}15^{16}\cdot 220\cdot 3+\cdots+C_{19}^{18}3\cdot 220^{9})$

$(15+\sqrt{220})^{82}+(15-\sqrt{220})^{82}$

$=2(15^{82}+C_{82}^{2}15^{80}\cdot 220+\cdots+C_{82}^{82}\cdot 220^{41})$

$=10(15^{81}\cdot 3+C_{82}^{2}15^{79}\cdot 220\cdot 3+\cdots+C_{82}^{82}44\cdot 220^{40})$

所以，

$(15+\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}+(15-\sqrt{220})^{82}=10k$，

其中，$k=(15^{18}\cdot 3+C_{19}^{2}15^{16}\cdot 220\cdot 3+\cdots+C_{19}^{18}3\cdot 220^{9})+(15^{81}\cdot 3+C_{82}^{2}15^{79}\cdot 220\cdot 3+\cdots+C_{82}^{82}44\cdot 220^{40})$

所以，

$(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}=10k-(15-\sqrt{220})^{19}-(15-\sqrt{220})^{82}$

又，$15-\sqrt{220}=\frac{5}{15+\sqrt{220}}<\frac{1}{3}$，故 $(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}<1$.

因此，$(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$ 的个位数字为 9.

19. 2^{2n-1}.

$\frac{1}{2}(2\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}-C_{2n}^{n})=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2n}=2^{2n-1}$

10. C_{n+m}^{k}.

设有 $m+n$ 个球，其中红球 m 个，白球 n 个，每次取 k 个球，共有

$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0$ 种方法，从而，

$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0=C_{n+m}^{k}$.

11. 1 或 0

解：①若 $n=3m$，显然 $(3m)^{2k}$ 除以 3 的余数为 0.

②若 $n=3m+1$，则

$(3m+1)^{2k}=C_{2k}^{0}(3m)^{2k}+C_{2k}^{1}(3m)^{2k-1}+\cdots+C_{2k}^{2k-1}\cdot 3m+1$ 故被 3 除余数为 1

③若 $n=3m-1$，同理被 3 除余数为 1

故所求余数为 0 或 1.

12. $N=76545000$.

解，$(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{6}+\sqrt{N}=\sqrt{N+1}$，平方得

$(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{12}+2\sqrt{N}(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{6}+N=N+1$



$$2\sqrt{N}=\frac{1-(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{12}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{(7-6)^{6}-(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{12}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{6}}$$

$=(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{6}-(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{6}$.

按二项式展开为 $2\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}$，$6\cdot225$，得 $N=76545000$.

13. 29999

解：$1991^{2000}=(1990+1)^{2000}$

$=1+2000\times1990+\frac{1}{2}\times2000\times1999\times1990^{2}+\cdots+1990^{2000}$

故只需考虑前三项之和除以 10^{6} 的余数，而前三项之和除以 10^{6} 的余数为 29999.

14. 744.

解：$N=19^{88}-1=(20-1)^{88}-1=(1-4\times5)^{88}-1=2^{5}(2M-55)$，

其中 M 为正整数，这表明 N 中素因子 2 的最高次幂是 5，又 $N=(1+2\times9)^{88}-1=3^{2}(2\times89+9p)$，其中 p 为整数.

这表明 N 中素因子 3 的最高次幂是 2.

因此 $N=2^{5}\cdot3^{2}\cdot Q$，其中 Q 为正整数，且 $2,3\in Q$.

因此 N 中所有形如 $2^{a}3^{b}$ 的因数之和为

$(2+2^{2}+\cdots+2^{5})(3+3^{2})=744$

15. 解：$a_0=0$，计算得 $a_1=1$.

$\therefore a_n=(2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+2^{n-5}C_n^5+\cdots)\in\mathbf{Z}(n\in\mathbf{N})$

又易知 $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_{n+2}\equiv a_{n+1}-a_n\pmod{3}$

数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_8$ 前 8 项除以 3 的余数依次是 0,1,1,0,2,2,0,1.

$\therefore a_6\equiv a_0\pmod{3}$，$a_7\equiv a_1\pmod{3}$，且 $n\in\mathbf{Z}$ 时，$a_{n+6}\equiv a_n\pmod{3}$.

于是在此数列中凡 a_{3k} 的项且只有这些项除以 3 的余数为 $0(k\in\mathbf{N})$

定义 $a_{-n}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^{-n}-(2-\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}}$，$\because(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore a_{-n}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^{-n}-(2-\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^{n}-(2+\sqrt{3})^{n}}{2\sqrt{3}}=-a_n$.

即 $n<0$，$n\in\mathbf{Z}$，$a_n\in\mathbf{Z}$，当且仅当 $n\equiv0\pmod{3}$ 时，$a_n\equiv0\pmod{3}$

16. 4

解：由二项式定理知 $a-b\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^{100}$，

$\therefore a=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{100}+(1-\sqrt{2})^{100}]$

$b=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{100}-(1-\sqrt{2})^{100}]$



故 $ab=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{200}-(1-\sqrt{2})^{200}]$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^{100}-(3-2\sqrt{2})^{100}]$

设 $x_n=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n]$，则 $x_1=1, x_2=6$.

再由恒等式 $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-b^{n-1})-ab(a^{n-2}-b^{n-2})$，

得 $x_n=6x_{n-1}-x_{n-2}(n\geqslant 3)$，

$\{x_n\}$ 的个位数字依次为 1,6,5,4,9,0,1,6,5,4,9,0,…

$\therefore x_{n+6}\equiv x_n(\mathrm{mod}\,10)$，$x_{100}\equiv x_{6\times16+4}\equiv x_4(\mathrm{mod}\,10)$

则 ab 的个位数字是 4.

17. 证明：由 $C_{n+k+1}^{n+1}=C_{n+k}^{n}+C_{n+k}^{n+1}$，

$C_{n+k}^{n+1}=C_{n+k-1}^{n}+C_{n+k-1}^{n+1}$，

…

$C_{n+3}^{n+1}=C_{n+2}^{n}+C_{n+2}^{n+1}$，

$C_{n+2}^{n+1}=C_{n+1}^{n}+C_{n+1}^{n+1}=C_{n+1}^{n}+C_{n}^{n}$，相加即得

18. 解：由恒等式 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ 得

$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot C_n^k=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot nC_{n-1}^{k-1})$

$=n\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}+n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}$

$=n\sum_{k=2}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}+n2^{n-1}$

$=n\sum_{k=2}^{n}(n-1)C_{n-2}^{k-2}+n2^{n-1}$

$=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$

$=n(n+1)2^{n-2}$

19. 证明：由$[f(x)]^2$中的 x^{n+1} 系数是 $a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1$，得

$b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1$，

而 $f(1)=\frac{1}{2}(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2$

故只需证明 $a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1\leqslant\frac{1}{2}(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2$.

事实上 $(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2=a_0^2+2a_0(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$

$\geqslant 2a_0(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant 2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1)$

所以不等式成立.



20. 证明：记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，其中 k 元子集有 C_n^k 个，各 k 元子集最小元素的总和为 $F(n,k)C_n^k$，构造集合 $M=\{0\}\cup N$，它共有 $n+1$ 个元素，从 M 中取出一个 $k+1$ 元子集，再去掉这个子集中最小的元素，便得到 N 中一个 k 元子集，这样便定义了一个从 M 的 $k+1$ 元子集到 N 的 k 元子集的一个映射，这个映射不是一一映射，对 N 中任一个 k 元子集 A，若它的最小元素为 i，那么 A 一定是 M 中 i 个 $k+1$ 元子集的象：$\{0\}\cup A$，$\{1\}\cup A$，$\cdots$，$\{i-1\}\cup A$，这就是说，i 正好等于上述 $k+1$ 元子集的个数，因而，N 中每一个 k 元子集中的最小数的总和，正好等于 M 中一切 $k+1$ 元子集的数目，即 $F(n,k)C_n^k=C_{n+1}^{k+1}$，得 $F(n,k)=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n+1}{k+1}$.

五、组合恒等式（答案略）

六、古典概型

1. E：从所有电话号码中任取一个，观察取到哪个号码.

电话号码总数是从 0，1，2，…，9 中任取 5 个作可重复排列的排列数，共有 10^5 个，所以 Ω 有 10^5 个样本点. 因为 10^5 个号码可视为等可能的，所以 E 是古典概型.

A：从所有电话号码中任取一个，取到的是由 5 个不同数码组成的电话号码.

属于 A 的样本点数为 A_{10}^5.

所以 $P(A)=\frac{A_{10}^5}{10^5}=0.3024$.

2. $P=\frac{12\times 8}{1000}=0.096$.（提示：本题是古典概型；正方体共有 12 条棱，每一条棱上有 8 个两面涂漆的小正方体，所以两面涂漆的小正方体总数为 12×8 个）.

3. $P=\frac{8!\times 3!}{10!}=0.067$（提示：10 本书列在书架上，其中指定的三本书排在一起的方法数可如下求得：先把指定的三本书捆在一起与其余 7 本书一起排列，共有 $8!$ 种排法，对这样的一种排法，指定的三本书都有 $3!$ 种不同排法，所以共有 $8!\times 3!$ 种不同排法）

4. $P=\frac{C_{63}^1}{C_{64}^2}\approx 0.03$.（提示 总方案数有 $4^3=64$ 个. 本题相当于：64 个球中有 1 个黑球，63 个白球，从中任取 2 球，求恰有 1 个黑球的概率）.

5. (1) $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$，(2) $\frac{19}{100}$（提示 1～100 中，能被 10 或 11 整除的数有 10，20，…，100；11，22，…，99 共 19 个）.

6. 都是 $\frac{C_3^2}{2^3}=\frac{3}{8}$.

7. $\frac{C_{40}^1\cdot C_{30}^1\cdot C_{20}^1}{C_{90}^3}\approx 0.204$.



8. E：从 0 至 9 十张卡片中任取 4 张排成一列，观察排出一个什么数，Ω 包含 A_{10}^4 个样本点，且它们是等可能的，故 E 是古典概型

A："排出的是一个四位偶数"。

今求 A 包含的样本点数：

末位是 0 的四位偶数有 A_9^3 个；

末位是 2 的四位偶数有 $8\times8\times7$ 个(固定末位是 2 后，第一位除 0 和 2 外，有 8 种排法，接着排第二位，除首位和末位已排好外有 8 种排法，第三位有 7 种排法)

末位是 4，6，8 的情况与末位是 2 的情况一样有 $8\times8\times7$ 个。

所以 $P(A)=\dfrac{A_9^3+4(8\times8\times7)}{A_{10}^4}=\dfrac{41}{90}$。

9. (1) $\dfrac{C_6^1\cdot C_{14}^2}{C_{20}^3}\approx0.48$(提示：1～20 中有 6 个数能被 3 整除，本题相当于 20 个球中有 6 个黑球，从中任取 3 个，恰有 1 个为黑球的概率)。

(2) $1-\dfrac{C_6^0C_{14}^3}{C_{20}^3}\approx0.68$(提示："三张中至少有一张号码能被 3 整除"与"三张中没有一张能被 3 整除"是对立事件)。

10. 设 A："组成的四位数是以 1 为首的"，B："组成的四位数的末位是 4"，则 $P(A)=P(B)=\dfrac{3!}{4!}$，$P(AB)=\dfrac{2!}{4!}$，所求概率是 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{5}{12}$。

11. 把 10 枚硬币看作是各不相同的(例如设想把它们编号)，本题随机试验 E 是从装有 10 枚硬币(伍分 2 枚，贰分 3 枚，壹分 5 枚)的袋中任取 5 枚，观察到取哪 5 枚，一种取法就是一枚样本点，共有 C_{10}^5 枚样本点，且它们可视为等可能的。

A："取出的 5 枚硬币，币值总额超过 1 角"，事件 A 可表为如下的六个互斥事件之和：

A_1："取出的 5 枚硬币中，有 1 枚伍分硬币，2 枚贰分硬币，2 枚壹分硬币"，属于 A_1 的样本点数为 $C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_5^2$，简记为：

A_1："5，2，2，1，1"有 $C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_5^2$ 个样本点，同理。

A_2："5，2，2，2，1"有 $C_2^1\cdot C_3^3\cdot C_5^1$ 个样本点。

A_3："5，5，2，2，2"有 $C_2^2\cdot C_3^3$ 个样本点。

A_4："5，5，2，2，1"有 $C_2^2\cdot C_3^2\cdot C_5^1$ 个样本点。

A_5："5，5，2，1，1"有 $C_2^2\cdot C_3^1\cdot C_5^2$ 个样本点。

A_6："5，5，1，1，1"有 $C_2^2\cdot C_5^3$ 个样本点

由于 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 彼此互斥，且 $A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6$，

所以属于事件 A 的样本点数是

$C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_5^2+C_2^1\cdot C_3^3\cdot C_5^1+C_2^2\cdot C_3^3+C_2^2\cdot C_3^2\cdot C_5^1+C_2^2\cdot C_3^1\cdot C_5^2+C_2^2\cdot C_5^3=126$。



所以 $P(A)=\frac{126}{C_{10}^{5}}=\frac{1}{2}$.

12. 设 A:"在该市教工中任抽一名,他订阅甲报",B:"在该市教工中任抽一名,他订阅乙报",C:"在该市教工中任抽一名,他订阅丙报",则所求概率为

$P(A\cup B\cup C)=0.2+0.16+0.14-0.08-0.05-0.04+0.02=0.35$.

13. 设 A_i 表示"投一弹炸中第 i 军火库",则投一弹,军火库爆炸的事件可表为 $A_1+A_2+A_3$.

所以 $P(A_1+A_2+A_3)=0.025+0.1+0.1=0.225$

14. 该批产品被接收的事件,相当于从 100 件产品中任取的 50 件产品中有 0 件次品或 1 件次品.

设 A:"任取的 50 件产品中有 0 件次品",

B:"任取的 50 件产品中有 1 件次品",则所求概率为

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_{5}^{1}\cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}\approx 0.181$

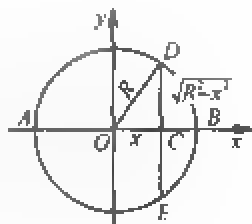
七、几何概型

1. $P(A)=\frac{A\text{的体积}}{\text{容器的体积}}=\frac{1}{2}$

2. (1) $p_1=\frac{\frac{3}{2}a-\frac{a}{2}}{2a}=\frac{1}{2}$.

(2) 设断点的坐标为 x,则所求概率:

$$p_2=P(|x-a|\leqslant b)=\begin{cases}P(|x-a|\leqslant 0)=0 & (b=0),\\ P(-b\leqslant x-a\leqslant b)=P(a-b\leqslant x\leqslant a+b)\\ \quad=\frac{1}{2a}[(a+b)-(a-b)]\\ \quad=\frac{b}{a} & (0<b\leqslant a),\\ 1 & (b>a).\end{cases}$$

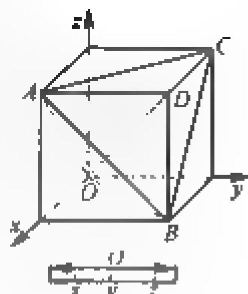


3. 如图,以圆心为原点,沿垂直于这些弦之直径方向作 x 轴,则弦 DE 所在位置由点 C 的坐标 x 表示出来,样本空间 Ω 由满足 $|x|\leqslant R$ 的全体点构成,即由直径 AB 的所有点构成,其长为 $2R$. 当弦处于坐标为 x 的点 C 处时,弦长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$. 所求事件 A 应使 x 满足 $2\sqrt{R^2-x^2}>R$,即 $|x|<\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}R<x<\frac{\sqrt{3}}{2}R$,其长为 $\sqrt{3}R$.



所以 $P(A)=\frac{\sqrt{3}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 设三线段各长为 x,y,z,则 Ω 满足 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的点(x,y,z)构成,它是边长为 a 的立方体内的所有点(如图)



设 A 表示三线段 x,y,z 能构成一个三角形的事件,其充要条件是 $z<x+y,y<x+z,x<y+z$,即点(x,y,z)应在平面 $z=x+y$ (OAC)之"下方",在平面 $y=x+z(OBC)$之"左方",在平面 $x=y+z$ (OAB)之"上方",即在六面体 $OABCD$ 内

所以 $P(A)=\frac{\text{六面体}OABCD\text{的体积}}{a^3}=\frac{a^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a}{a^3}=\frac{1}{2}$.

八、概率与统计

1. B

设袋子中绿球的个数为 x,从袋子中任取一个球,是蓝球的概率为 $\frac{6}{x+6}=\frac{1}{4}$,解得 $x=18$.

2. A

$6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$,因第一掷出现 5,4,3,2,1 的概率分别为 $\frac{1}{12}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,第二掷出现 1,2,3,4,5 的概率分别为 $\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{12}$,则所求 $P=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times3+\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{9}$.

3. C

由题意知,x 赢的概率为 $\frac{1}{4}$,y 赢的概率为 $\frac{3}{5}$,则 z 赢的概率 $P(z)=1-P(x)-P(y)=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{5}=\frac{3}{20}=\frac{3}{17+3}$,故 z 的输赢之比为 $17:3$

4. A

设 $i=\{$所取球的号码为 $i\}$,$i=1,2,\cdots,10$.

则基本事件总数 $n=10$.

设 $A=\{$所取球的号码为偶数$\}$,则

$A=\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\cup\{8\}\cup\{10\}$,则 A 中所含的基本事件数 $n_A=5$,



$\therefore P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{5}$　只考虑第三把钥匙，共有5种等可能的结果，而第三次打开房门，看作正确的钥匙恰好放在第三个位置，有1种，所以所求概率为$\frac{1}{5}$

6. $\frac{17}{40}$　从这10个数中取3个不同的偶数的取法有C_5^3种，取出1个偶数和2个不同奇数的取法有$C_5^1C_5^2$种．从这10个数中取出3个数，使其和为小于10的偶数，有如下9种：(0,1,3)，(0,1,5)，(0,2,4)，(1,2,3)，(0,1,7)，(0,2,6)，(0,3,5)，(1,2,5)，(1,3,4)．因此，合乎条件的取法有$C_5^3+C_5^1C_5^2-9=51$种．故所求概率为$\frac{51}{C_{10}^3}=\frac{17}{40}$．

7. $m+n=634$

$\because 10^{99}=2^{99}\times5^{99}$，$\therefore 10^{99}$的正因子个数$M=(99+1)(99+1)=100^2$

$\because 10^{88}=2^{88}\times5^{88}$

$\therefore$在10^{99}的正因子中，它为10^{88}的整数倍的个数

$N=(99-88+1)(99-88+1)=12^2$，因此从$10^{99}$的正因子中随机地选取一个，它恰好为$10^{88}$的整数倍的概率是$P=\frac{12^2}{100^2}=\frac{9}{625}=\frac{m}{n}$，得$m+n=634$．

8. 4.5　ξ的分布列如下：

ξ	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$E\xi=3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{5}=4.5$

9. 990　以A、B代表抽屉里红、蓝袜子数，由任取两只它们同色的概率为$\frac{1}{2}$，得任取两只它们不同色的概率为$\frac{1}{2}$，得$\frac{AB}{C_{A+B}^2}=\frac{1}{2}$，$\therefore (A+B)(A+B-1)=4AB$，即$(A-B)^2=A+B$，即袜子数是一个平方数，令$n=A-B$，则$n^2=A+B$，得$A=\frac{n^2+n}{2}$，$\because A+B\leqslant1991$，$\therefore n\leqslant\sqrt{1991}<45$．

当$n=44$时，A取得最大值990．

10. $\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

设得到n分的概率为P_n，因为得到n分的情况只可能是：先得$(n-1)$分，再掷出一次



正面，所以 $1-P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}$．

由于 $P_1=\frac{1}{2}$

$P_2=1-\frac{1}{2}P_1$

$P_3=1-\frac{1}{2}P_2$

…

$P_n=1-\frac{1}{2}P_{n-1}$

转化为：$P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-\frac{2}{3})$，

于是$\{P_n-\frac{2}{3}\}$是一个首项为$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，

$\therefore P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore P_n=\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$

11. 3.25%

令 A={任取一件，恰好抽到不合格产品}，B_j={任取一件，恰好抽到第 j 条流水线的产品}($j=1,2,3,4$)

由全概率公式可得：

$P(A)=\sum_{j=1}^{4}P(A|B_j)P(B_j)=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02=0.0325=3.25\%$

12. 5.216 万元

以 x 表示一周五天内机器发生故障的天数，则 $x\sim B(5,0.2)$，于是 x 有概率分布 $P(x=k)=C_5^k0.2^k\cdot0.8^{5-k}$，$k=0,1,2,3,4,5$ 以 y 表示一周内所获利润，则

$$y=g(x)=\begin{cases}10, & 若\ x=0\\ 5, & 若\ x=1\\ 0, & 若\ x=2\\ -2, & 若\ x\geqslant3\end{cases}$$

y 的概率分布为

$P(y=10)=P(x=0)=0.8^5=0.328$，

$P(y=5)=P(x=1)=C_5^1 0.2\cdot0.8^4=0.410$



$P(y=0)=P(x=2)=C_5^2 0.2^2\cdot 0.8^3=0.205$

$P(y=-2)=P(x\geq 3)=1-P(x=0)-P(x=1)-P(x=2)=0.057$

故一周内的期望利润是 $Ey=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205-2\times 0.057=5.216$（万元）。

13. 解：设 A_i = "第 i 封信碰对了地址"，于是"3 封信中至少有一封信碰对了地址"为 $A_1\cup A_2\cup A_3$。

$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$

把 3 个信封依次排好，把 3 封信的每一个排列表示一种套入方式，共有 $3!=6$ 种，第一封信碰对了地址时，另外两封信只有两种套入方式，故，

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，同样可得

$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{6}$

$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

即 3 封信随意地套入了 3 个信封至少有一封信碰对了地址的概率是 $\frac{2}{3}$

14. 解：设正 $(2n+1)$ 边形的顶点为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},A_{n+2},\cdots,A_{2n+1}$，随机选出的三点中有一点为 A_{n+1}，另外两个点有 C_{2n}^2 种可能，如果组成的三角形为锐角三角形（即含中心），那么一个点应从 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中选出，另一个点应从 $A_{n+2},A_{n+3},\cdots,A_{2n+1}$ 中选出，并且在选定一点 $A_k(1\leq k\leq n)$ 后，第二点有 k 种选法，即可选 $A_{n+2},A_{n+3},\cdots,A_{n+k+1}$。

因而共有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 种可能。

从而所求概率为 $\frac{n(n+1)}{2C_{2n}^2}=\frac{n+1}{2(2n-1)}$

15. 解：设事件 A = "某一小时内甲柜面不需要售货员照顾"，事件 B = "某一小时内乙柜面不需要售货员照顾"，事件 C = "某一小时内丙柜面不需要售货员照顾"，则事件 A、B、C 相互独立，且 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.7$。(1) 设事件 D = "某一小时内只有丙柜面需要售货员照顾"，则 $D=A\cdot B\cdot\bar{C}$，又事件 A、B、C 相互独立，因而 $P(D)=P(A)P(B)P(\bar{C})=0.9\times 0.8\times 0.3=0.216$。

(2) 设事件 E = "某一小时内三个柜面中最多有一个需要售货员照顾"，则 $E=A\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}$，又事件 $A\cdot B\cdot C$、$\bar{A}\cdot B\cdot C$、$A\cdot\bar{B}\cdot C$、$A\cdot B\cdot\bar{C}$ 彼此互斥且 A、B、C、$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 相互独立，故



$P(E)=P(A\cdot B\cdot C)+P(\overline{A}\cdot B\cdot C)+P(A\cdot \overline{B}\cdot C)+P(A\cdot B\cdot \overline{C})=0.9\times0.8\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.902$.

(3)设事件 $F=$｛某一小时内三个柜面至少有一个需要售货员照顾｝，则 $\overline{F}=A\cdot B\cdot C$，又 A,B,C 相互独立，故 $P(\overline{F})=P(A)P(B)P(C)=0.9\times0.8\times0.7=0.504$，故 $P(F)=1-P(\overline{F})=1-0.504=0.496$.

16. 解：(1)棋子开始在第0站为必然事件，故 $P_0=1$.

第1次投掷硬币出现正面，棋子跳到第1站，其概率为 $\frac{1}{2}$，故 $P_1=\frac{1}{2}$；

棋子跳到第2站，应从如下两方面考虑：

(a)前两次掷硬币都出现正面，其概率为 $\frac{1}{4}$；

(b)第1次掷硬币出现反面，其概率为 $\frac{1}{2}$.

故 $P_2=\frac{3}{4}$.

(2)棋子跳到第 $n(2\leqslant n\leqslant 99)$ 站的情况有下列两种，并且也只有两种：

(a)棋子先跳到 $n-2$ 站，又掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

(b)棋子先跳到 $n-1$ 站，又掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

所以，$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$.

故有 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

(3) 由(2)知，数列 $P_1-P_0,P_2-P_1,\cdots,P_{99}-P_{98}$ 是首项为 $P_1-P_0=\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，

因此有：$P_1-1=\left(-\frac{1}{2}\right)^1$

$P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

…

$P_{99}-P_{98}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}$

由以上各式相加得：



$$P_{99}-1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}$$

$$\therefore P_{99}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right]$$

$$P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\right]$$

17. 解：设 ζ 表示保险公司在参加保险者身上的收益，则 ζ 可取两个值 $\zeta=100$ 和 $\zeta=100-a$，且 $P(\zeta=100)=0.99$，$P(\zeta=100-a)=0.01$，保险公司的期望获益 $E\zeta>0$. 因为 $E\zeta=0.99\times100+0.01\times(100-a)=100-0.01a>0$，所以 $100<a<10000$. 故 a 在 100 元到 10000 元之间保险公司可期望获益.

18. 解：由于骰子是均匀的正方体，所以抛掷后各点数出现的可能性是相同的.

(1)因骰子出现的点数最大为 6，而 $6\times4>2^4$，$6\times5<2^5$，因此，当 $n\geqslant5$ 时，n 次出现的点数之和大于 2^n 已不可能，所以，最多只能连过 4 关.

(2)设事件为 A_n 为"第 n 关过关失败"，则对立事件 $\overline{A_n}$ 为"第 n 关过关成功".

第 n 关游戏中，基本事件总数为 6^n 个.

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}$$

$$P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-\frac{56}{6^3}=\frac{20}{27}$$

故连过三关的概率为 $P(\overline{A_1})\times P(\overline{A_2})\times P(\overline{A_3})=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{20}{27}=\frac{100}{243}$.

19. 解：九个编号不同的小球放在圆周的九个等分点上，每放一个，相当于九个不同元素在圆周上的一个圆形排列，故共有 $8!$ 种放法，考虑到翻转因素，则本质不同的放法有 $\frac{8!}{2}$ 种. 下求使 s 达到最小值的放法数：在圆周上，从 1 到 9 有优弧与劣弧两条路径，对其中任一条路径，设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码，则 $|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-9|\geqslant|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-9)|=|1-9|=8$. 上式取等号当且仅当 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k<9$，即每一段弧上的小球编号都是由 1 到 9 递增排列，因此，$s_{\min}=2\times8=16$.

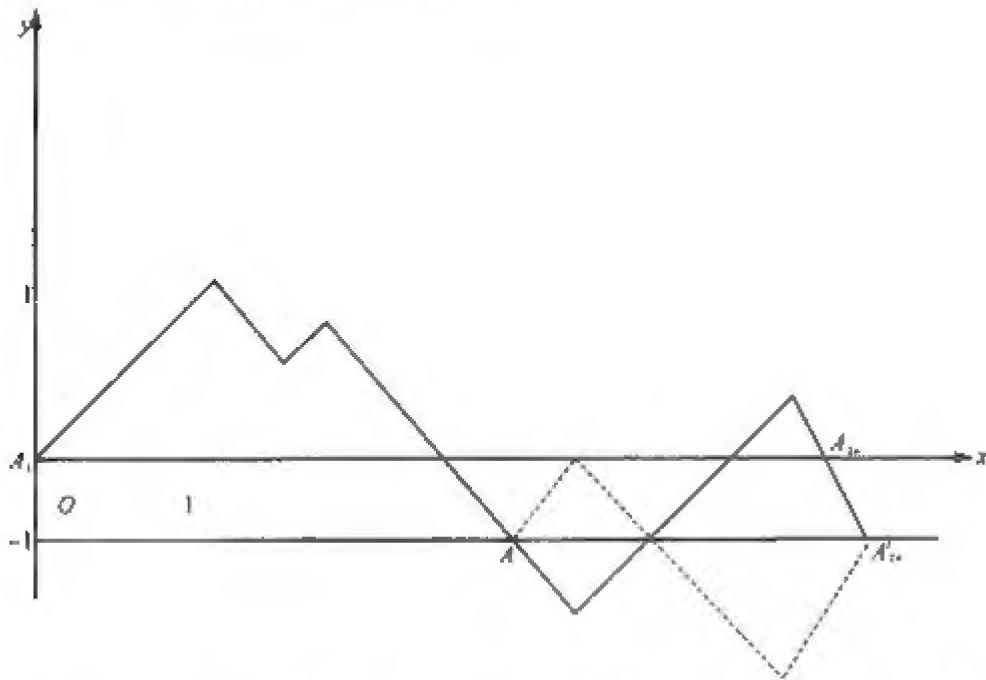
由上知，当每个弧段上的球号 $\{1,x_1,x_2,\cdots,x_k,9\}$ 确定后，达到最小值的排序方案便唯一确定. 在 1,2,…,9 中，除 1 与 9 外，剩下 7 个球号 2,3,…,8，把它们分为两个子集，元素较少的的一个子集共有 $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=2^6$ 种情况，每种情况对应着圆周上使 s 值



达到最小值的唯一排法，即有利事件总数是 2^6 种，故所求概率 $p=\frac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\frac{1}{315}$.

20. 解：在直角坐标系中画一条折线，表示售票的情况.

折线的起点为原点，如果第 1 个人用伍元买票，就将原点与点 $(1,1)$ 相连；如果第一个人用拾元买票，就将原点与 $(1,-1)$ 相连. 这里横坐标 1 表示第 1 个人，他用伍元买票就将前一点（原点）的纵坐标加 1；用拾元买票，就将前一点的纵坐标减 1，得出折线上的一个新点，并与前一点用线段连结起来. 依此类推，如果已有折线上的点 A_k，那么将新点 A_{k+1} 与 A_k 相连，A_{k+1} 的横坐标是 $k+1$，而纵坐标是 A_k 的纵坐标加 1（如果第 $k+1$ 个人用伍元买票）或减 1（如果第 $k+1$ 个人用拾元买票）. 折线的终点 A_{2n} 的横坐标是 $2n$，纵坐标是 0（因为 $2n$ 个人中，n 个人用伍元买票，n 个人用拾元买票，所以 A_{2n} 的纵坐标等于 O 的纵坐标 0 加上 n 个 5，减去 n 个 5，仍然为 0）.



称每两个点 A_k，A_{k+1} 之间的线段 A_kA_{k+1} 为一段 $(k=0,1,2,\cdots,2n-1,A_0=0)$，折线有 $2n$ 段，而且其中有 n 段向上（n 个人用伍元买票），n 段向下（n 个人用拾元买票）. 因此，这种折线的总数是 C_{2n}^n（在 $2n$ 段中 n 段向上，其余 n 段向下）. 其中有利情况（不出现因售票员无钱可找而等待的情况）折线全在横轴上方，不利情况（有时因售票员无钱可找而等待的情况）折线有一部分在横轴下方.

我们计算不利情况有多少种. 为此，在不利情况中，设折线第一次与直线 $y=-1$ 相交于点 A_k，将折线在 A_k 以后的部分关于直线 $y=-1$ 作轴对称（O 到 A_k 这一部分不



变），得出图中虚线.

这条新折线，起点仍为 O. O 到 A_1 这一部分是原来的实线，A_1 到 A'_{2n} 是虚线，终点 A'_{2n} 与 A_{2n} 关于 $y=-1$ 对称，坐标为 $(2n,-2)$，所以新折线有 $n+1$ 段向下，$n-1$ 段向上（因为终点的纵坐标为 -2）. 这样的折线共有 C_{2n}^{n+1} 条（从 $2n$ 段中选 $n+1$ 段向下，其余 $n-1$ 段向上）.

因此，不利情况有 C_{2n}^{n+1} 种，有利情况的种数为：

$$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}=C_{2n}^{n}-\frac{n}{n+1}C_{2n}^{n}$$

所以不会出现无钱可找的概率为 $\dfrac{\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n}}=\dfrac{1}{n+1}$.

